

Firmin VARESCON

Table des matières

1 Conjecture de Leopoldt.	11
1.1 Conjecture de Leopoldt et équivalent	11
1.1.1 Notations générales.	12
1.1.2 Sur les pro- p -complétés.	12
1.1.3 Quelques équivalents à la conjecture.	13
1.2 Groupe de classes de rayon	14
1.2.1 Conducteur d'une extension	15
1.2.2 Définition du groupe de classes de rayon	15
1.3 Test pour vérifier la conjecture de Leopoldt	21
1.3.1 Propriétés de stabilisation de $Cl_{p^n}(K)$	23
1.4 Méthode pour vérifier la conjecture de Leopoldt	25
1.5 Critère équivalent	26
2 Calcul de la torsion de \mathfrak{X}	31
2.1 Introduction	31
2.1.1 Motivation du problème	32
2.2 Comportement asymptotique de \mathcal{A}_{p^n}	33
2.3 Une borne explicite	37
2.3.1 Le cas quadratique et $p \neq 2$	37
2.3.2 Le cas général.	38
3 Approche heuristique	41
3.1 Rappels sur les heuristiques de Cohen-Lenstra	41
3.1.1 Calcul explicite des moyennes.	46
3.2 Comparaison avec les résultats numériques.	48
3.2.1 Résultats numériques.	48
3.3 Explication des résultats numériques	73
3.3.1 Incidence de la signature du corps	77

4 Application à la conjecture de Greenberg.	83
4.0.2 Équivalent à la conjecture de Greenberg	83
4.0.3 Exemple de la conjecture de Greenberg.	83
5 Annexe	89
5.0.4 Heuristique sur le 9-rang (section 3.3).	89
5.0.5 Tables numériques.	92

Introduction.

Histoire du groupe de classe d'idéaux.

”Il n'est pas possible de décomposer un cube en somme de deux cubes, une puissance quatrième en somme de deux puissances quatrièmes et généralement aucune puissance d'exposant supérieur à 2 en deux puissances de même exposant.”

Cette annotation de Pierre Fermat(1601-1665) vers 1937 est devenue l'un des théorèmes les plus célèbres de mathématiques. Il s'énonce aujourd'hui comme suit :

Théorème 0.0.1. *Dès que $n \geq 2$, il n'existe pas d'entier non nul x, y et z tel que :*

$$x^n + y^n = z^n$$

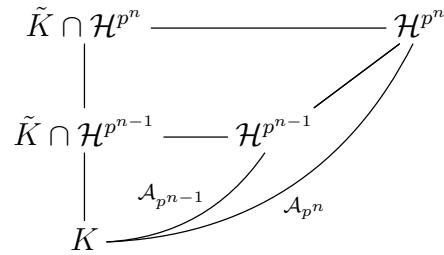
Fermat laisse entendre qu'il disposait d'une preuve de ce théorème, mais en 1659 il propose à Carcavi comme problème de résoudre les cas particuliers $n = 3$ et $n = 4$. Il s'était certainement rendu compte qu'il avait commis une erreur dans la preuve. Il ne pouvait pas savoir que l'anneau dans lequel on fait les calculs n'est pas toujours principal. Si des preuves furent trouvées pour quelques cas particuliers ($n=3$ Euler 1770), une grande avancée est due au mathématicien allemand Ernst Kummer qui introduit la notion d'idéal et démontre le grand théorème de Fermat pour les premier donc l'anneau des entiers de $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ est factoriel. Ce défaut de factorialité est ensuite formalisé par Dedekind en 1876 qui introduit les anneaux de Dedekind et la notion d'idéal fractionnaire. Ceci permet d'exhiber un groupe fini, le groupe de classes d'idéal, qui permet de mesurer le défaut de principauté de l'anneau d'entier. Il existe des algorithmes qui permettent de calculer ce groupe mais leurs complexités dépassent rapidement la capacité des machines actuelles. Les travaux de Kummer sur le théorème de Fermat l'amène à développer

les lois de réciprocités. Ces notions lui permettent de démontrer le grand théorème de Fermat pour une certaine catégorie d'exposant. Il faut attendre 1994, pour que Wiles donne une preuve complète de ce théorème [Wil95]. Hilbert reprendra les travaux de Kummer et démontrera l'existence de ce que l'on appelle les corps de Hilbert. C'est en fait l'existence d'une unique extension H de K non ramifiée et telle que $\text{Gal}(H/K)$ est isomorphe au groupe de classe d'idéaux. Ceci sont les prémisses de la théorie du corps de classes qui permet d'obtenir des informations sur les extensions abéliennes d'un corps de nombres à partir des éléments tiré de ce corps. Les travaux Tagaki et d'Artin permettent des généralisations de la loi de réciprocité quadratique, d'un corps de nombres quelconque, cette généralisation est appelée loi de réciprocité d'Artin.

La théorie d'Iwasawa.

Les travaux d'Iwasawa [Iwa73] [Iwa59] l'amène à développer une théorie qui porte aujourd'hui son nom. Les objets étudiés par la théorie d'Iwasawa sont les \mathbb{Z}_p -extensions d'un corps de nombres (Iwasawa les appelaient les Γ -extension) c'est à dire une extension K_∞ d'un corps de nombre K tel que $\text{Gal}(K_\infty/K) = \mathbb{Z}_p$. La donnée d'une \mathbb{Z}_p -extension est équivalente par la correspondance de Galois à la donnée d'un tour d'extension $K = K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \dots K_n \subset \dots \subset K_\infty$ où $\text{Gal}(K_n/K) \cong \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$. L'exemple le plus connu est la \mathbb{Z}_p -extension cyclotomique. Elle est obtenue en ajoutant ζ_p^n les racines p^n -ièmes de l'unité à K . Le Groupe de Galois $\text{Gal}(K(\zeta_p, \zeta_{p^2}, \dots, \zeta_{p^n}, \dots)/K)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}_p \times$ un groupe fini. Donc il existe une sous extension K_∞ de $K(\zeta_p, \zeta_{p^2}, \dots, \zeta_{p^n}, \dots)$ qui est une \mathbb{Z}_p -extension de K . Ainsi il existe un tour d'extension $K = K_0 \subset K_1 \subset \dots K_n \dots K_\infty$ tel que $\text{Gal}(K_n/K) \cong \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ et $K = \bigcup_{n=0}^{\infty} K_n$. Leopoldt a conjecturé qu'il existait $r_2 + 1$ \mathbb{Z}_p -extensions de K , où r_2 est le nombre de plongement complexe de K dans \mathbb{C} . Cette conjecture a été étudiée par de nombreux mathématiciens. Une démonstration dans le cas abélien a été donnée dans le cas abélien suite aux travaux de James Ax [Ax65], et Armand Brumer en 1967 [Bru67]. Dans le cas général il n'existe pas de démonstration même si d'importantes ont été données par Waldschmidt en 1980 [Wal81]. Dans la première chapitre de cette thèse on donnera un algorithme permettant de vérifier la conjecture de Leopoldt pour un corps de nombre K , et un nombre premier p donnés. On se donne un corps de

nombre K et un nombre premier p . On note alors K_n les n -ièmes étages de l'extension cyclotomiques de K , \tilde{K} le compositum des \mathbb{Z}_p -extensions, \mathcal{H} la pro- p extension abélienne non-ramifiée maximale de K et \mathcal{H}^{p^n} le compositum de toutes les p -extensions de K , dont le conducteur divise p^n et \mathcal{A}_{p^n} le groupe de Galois $\text{Gal}(\mathcal{H}^{p^n}/K)$



La théorie du corps de classes nous permet de calculer \mathcal{A}_{p^n} avec la connaissance des éléments de K sans monter dans les tours de \mathbb{Z}_p -extensions et donc calculer des corps de gros degré ce qui dépasserait les capacités de calcul de machine dont on dispose actuellement. Ainsi en étudiant les propriétés de stabilité de \mathcal{A}_{p^n} et notamment si le cardinal du noyau de l'application de $\mathcal{A}_{p^{n+1}}$ dans \mathcal{A}_{p^n} , on peut proposer un test pour la conjecture de Leopoldt. En effet si ce cardinal est égal à p^{r_2+1} à partir d'un certain rang on démontre que le corps K vérifie la conjecture de Leopoldt pour ce premier p . Le but de la théorie d'Iwasawa est d'étudier les modules d'Iwasawa associés à une \mathbb{Z}_p -extension K_∞ d'un corps de nombres K . Ceci permet d'obtenir des informations arithmétiques sur K . L'un des principaux modules d'Iwasawa est le module \mathfrak{X} qui est le groupe de Galois de la pro- p extension abélienne non ramifiée en dehors de p , qui peut considérer comme le groupe de classe d'idéaux au niveau infini. On note M la pro- p extension abélienne non ramifiée en dehors de p maximal de K . Via la théorie du corps de classes, on sait que le groupe $\text{Gal}(M/H)$ est isomorphe au quotient $\mathcal{U} := \prod_{v|p} U_v^1 / \bar{U}_K$. La situation entre les différentes extensions étant résumée par le diagramme

suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \tau_p & & \\
 & \tilde{K} & \xrightarrow{\hspace{1cm}} & \tilde{K} H_0 & \xrightarrow{\hspace{1cm}} M_0 \\
 | & & & | & \\
 \tilde{K} \cap H_0 & \xrightarrow{\hspace{1cm}} & H_0 & \xrightarrow{\hspace{1cm}} & u \\
 | & & & | & \\
 K & \xrightarrow{\hspace{1cm}} & & & \mathfrak{x}
 \end{array}$$

Dans le deuxième chapitre de cette thèse on propose une méthode explicite pour calculer la \mathbb{Z}_p torsion de \mathfrak{X} . Afin d'éviter toute ambiguïté, on précise d'emblée que par calcul explicite, on entend écrire un programme pari-GP calculant \mathcal{T}_p , un corps K et un premier p étant donné. En effet en supposant la conjecture de Leopoldt vérifiée, ce que l'on peut vérifier en utilisant les résultats du premier chapitre. En calculant \mathcal{A}_{p^n} on pourra en déduire cette torsion. Un programme implémenté sur le logiciel pari-GP permet de déterminer explicitement la torsion. Dans le troisième chapitre on rappelle certains résultats sur les heuristiques de Cohen Leustra [CL84]. Et on confrontera les résultats obtenus pour des corps quadratiques, cubiques et quintiques. On donnera ensuite une explication des observations qu'on a faites.

Si l'on note X_n la p -partie du groupe de classe d'idéaux de K_n , alors le théorème d'Iwasawa suivant permet décrire l'ordre de X_n .

Théorème. [Iwa73] Il existe λ , μ et ν tel que $\#(X_n) = p^{\lambda n + \mu p^n - \nu}$.

L'invariant μ est conjecturalement nul, cette conjecture a été démontrée dans le cas abélien par Ferrero et Washington [FW79]. Greenberg a conjecturé que pour les corps totalement réels l'invariant λ était nul [Gre76]. Les travaux les plus célèbres sur cette conjecture sont du à Kraft et Schoof [KS95].

Théorème. L'invariant associé à la \mathbb{Z}_3 -extension pour un corps quadratique réel $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, $0 \leq d \leq 10000$ et $d \not\equiv 1 \pmod{3}$ sont tous égaux à zéro.

Ceci a été démontré par des méthodes calculatoires. D'autres travaux ont été effectués par Taya [Tay99] qui donne des exemples de corps cubiques où λ est nul pour $p = 5$ ou 7 . On verra dans le dernier chapitre comment en utilisant le calcul de la torsion de module p -ramifié d'Iwasawa. On peut

donner des exemples de corps vérifiant la conjecture de Greenberg. Dans un premier temps non montrera que la conjecture de Greenberg est vraie pour les corps quadratiques réel $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, $d < 1000$ sauf pour huit pour lesquels les calculs que l'on a effectué ne suffit pas pour conclure. Puis on donnera des cas où la conjecture est vérifiée et où la torsion est de rang deux.

Chapitre 1

Conjecture de Leopoldt.

1.1 Conjecture de Leopoldt et équivalent.

La conjecture de Leopoldt peut être vue comme un analogue p -adique du théorème de Dirichlet. On présente rapidement ce théorème pour introduire la conjecture de Leopoldt. Pour plus de détails on pourra consulter le chapitre IV de [Sam67]. Soit K un corps de nombres de degré n , r_1 (respectivement r_2) le nombre de places réelles (respectivement complexes) de K . On note E le groupe des unités de K . On a n plongements de K dans \mathbb{C} , r_1 plongements réels et $2r_2$ plongements complexes qui sont conjugués deux à deux. On regroupe les plongements complexes par paires pour obtenir :

$$\sigma_1, \dots, \sigma_{r_1}, \sigma_{r_1+1}, \bar{\sigma}_{r_1+1}, \dots, \sigma_{r_1+r_2}, \bar{\sigma}_{r_1+r_2},$$

on pose alors :

$$L(x) = (\log(|\sigma_1(x)|), \dots, \log(|\sigma_{r_1+r_2}(x)|))$$

L est appelé le plongement logarithmique de K^\times dans \mathbb{R}^\times

Théorème 1.1.1. (*Dirichlet*) (*théorème 1 p.72 [Sam67]*) Soit K un corps de nombres, le groupe des unités est isomorphe à $\mathbb{Z}^{r_1+r_2-1} \times G$ où G est le groupe (fini) des racines de l'unité contenues dans K .

Dans le cas p -adique on note de la même manière σ_i les plongements de K dans \mathbb{C}_p . Soit ϵ_i pour $1 \leq i \leq r_1 + r_2 - 1$ une base des unités de K modulo les racines de l'unité. On utilise alors le logarithme p -adique pour définir le régulateur p -adique R_p ,

$$R_p = \det(\delta_i \log_p(\sigma_i(\epsilon_j)))_{1 \leq i,j \leq r_1+r_2-1}$$

où $\delta_i = 2$ si σ_i est un plongement complexe et 1 sinon.

Conjecture 1 (Conjecture de Leopoldt). *Pour tout corps de nombres K et tout nombre premier p , $R_p \neq 0$.*

Jusqu'à présent il n'y a pas de démonstration générale de cette conjecture. Elle est vérifiée dans certains cas.

Théorème 1.1.2. [Bru67] *Si K/\mathbb{Q} est une extension abélienne alors la conjecture de Leopoldt est vérifiée pour tout nombre premier p .*

Cette conjecture est aussi démontrée dans le cas d'une extension abélienne d'un corps quadratique imaginaire. On sait aussi que l'analogue p -adique de la célèbre conjecture de Schanuel [Lan66] p.30-31 entraîne la conjecture de Leopoldt [Jau85] Proposition 1 p. 152.

Dans la littérature on peut trouver d'autres formulations de la conjecture de Leopoldt. On rappelle d'abord quelques notations.

1.1.1 Notations générales.

Dans O_K , anneau des entiers de K , l'idéal engendré par p s'écrit comme un produit d'idéaux premiers :

$$(p) = \prod_{v|p} \mathfrak{p}_v^{e_v}.$$

Pour chaque p -place v de K , on fixe une uniformisante π_v dans K_v , v -complété de K . On munit K_v de l'unique valuation prolongeant celle de \mathbb{Q}_p , de sorte que $v(p) = 1$ dans K_v et $v(\pi_v) = \frac{1}{e_v}$. On notera en outre $e = \max\{e_v, v|p\}$.

1.1.2 Sur les pro- p -complétés.

Par définition, le pro- p -complété d'un \mathbb{Z} -module M est la limite projective des quotients M/p^n . Dans le cas où M est de type fini sur \mathbb{Z} , cette limite projective est isomorphe au produit tensoriel sur \mathbb{Z} de M par \mathbb{Z}_p . On conviendra de noter \bar{M} le pro- p -complété d'un \mathbb{Z} -module M .

Pour une place v quelconque, \overline{U}_v désignera donc le pro- p -complété du groupe des unités U_v de K_v . On a par conséquent :

$$\overline{U}_v = \begin{cases} U_v^1 & \text{si } v|p \\ \mu_{p^\infty}(K_v) & \text{si } v \nmid p \end{cases},$$

où $\mu_{p^\infty}(K_v)$ est le groupe des racines p -primaires de l'unité contenues dans K_v .

Pour une p -place v et n entier naturel non nul, U_v^n désigne le groupe des unités u de K_v tels que $u \equiv 1[\pi_v^n]$ (compte tenu du fait que $v(p) = 1$, on a $u \in U_v^n \Leftrightarrow v(u - 1) \geq \frac{n}{e_v}$). Pour $n \geq 1$, le groupe U_v^n est naturellement muni d'une structure de \mathbb{Z}_p -module et est donc pro- p -complet, en d'autres termes $\overline{U}_v^n = U_v^n$.

On considère le plongement des unités de O_K dans $\prod_{v|p} U_v$

$$\begin{aligned} E &\hookrightarrow \prod_{v|p} U_v \\ (\epsilon) &\rightarrow (\epsilon, \dots, \epsilon) \end{aligned}$$

On note alors E_1 l'ensemble des ϵ dont l'image est dans U_v^1 et \widehat{E}_1 la fermeture de E_1 dans U_1

1.1.3 Quelques équivalents à la conjecture.

Soit M (respectivement H) la p -extension abélienne maximale de K non ramifiée (respectivement non ramifiée en dehors de p). Soit \tilde{K} le compositum des \mathbb{Z}_p -extensions de K . Les \mathbb{Z}_p -extensions sont non ramifiées en dehors de p donc contenues dans M . On note \mathfrak{X} le groupe de Galois $\text{Gal}(M/K)$.

Théorème 1.1.3. [NSW00] Soit K un corps de nombres et p un nombre premier alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1. la conjecture de Leopoldt est vraie pour p et K ;
2. le rang de \widehat{E}_1 est $r_1 + r_2 - 1$;
3. le morphisme canonique $E \otimes \mathbb{Z}_p \rightarrow \prod_{v|p} U_v$ est injectif ;
4. $\text{rang}_{\mathbb{Z}_p} \mathfrak{X} = r_2 + 1$ (ceci est la formulation classique de la conjecture de Leopoldt qui dit que le K a $r_2 + 1$ \mathbb{Z}_p -extensions).

5. $H^2(G_{S_p}(K), \mathbb{Z}_p) = 1$ où G_{S_p} est le groupe de Galois de la pro- p -extension non ramifiée de p , maximale de K

On note δ le nombre $r_1 + r_2 - 1 - \text{rang}(\widehat{E_1})$, il est appelé le défaut de Leopoldt et $0 \leq \delta \leq r_1 + r_2 - 1$. Waldschmidt a démontré que δ était en fait inférieur à $\frac{r_1+r_2-1}{2} + 1$ ([Wal81] p.120).

On note $Cl_p(K)$ la p -partie du groupe de classe idéaux de K , alors le module \mathfrak{X} peut être décrit par une suite issue de la théorie du corps de classe :

$$\bar{U}_K \longrightarrow \prod_{v|p} U_v^1 \longrightarrow \mathfrak{X} \longrightarrow Cl_p(K) \longrightarrow 1, \quad (1.1)$$

L'exactitude à gauche est équivalente à la conjecture de Leopoldt.

Donc en supposant la conjecture vraie pour K et p on obtient la suite exacte suivante :

$$1 \longrightarrow \bar{U}_K \longrightarrow \prod_{v|p} U_v^1 \longrightarrow \mathfrak{X} \longrightarrow Cl_p(K) \longrightarrow 1, \quad (1.2)$$

On commence par quelques rappels sur la théorie du corps de classe qui nous seront utiles par la suite.

1.2 Groupe de classes de rayon

On rappelle dans cette section la définition du groupe de classes de rayon p^n , via la théorie du corps de classes. On note que le groupe de classes de rayon p^n peut être considéré comme quotient d'un certain groupe d'idéaux (Cf [Gra03] définition 4.4 p. 37).

La théorie globale du corps de classes décrit les extensions abéliennes d'un corps de nombres K . Or on ne considère ici que des p -extensions abéliennes, qui sont décrites par la théorie p -adique du corps de classes ([Jau98]). Cette théorie est en tous points similaire à la théorie globale dans laquelle les corps locaux K_v^* seraient remplacés par leurs pro- p -complétés, mais en plus simple car la composante connexe du groupe des classes d'idèles disparaît.

La notion de groupe de classes de rayon est fortement liée à celle de conducteur d'une extension, on commence donc cette partie par de brefs rappels sur la notion de conducteur.

1.2.1 Conducteur d'une extension

La notion de conducteur est une notion locale dans le sens où elle est définie initialement pour une extension locale.

Définition 1.2.1. Le conducteur d'une extension abélienne de corps locaux L_v/K_v est le minimum des entiers c tels que $U_v^c \subset N_{L_v/K_v}(L_v^*)$.

Remarque. ([Ser68] chap V, §6, proposition 8 et corollaire 3). En particulier une extension abélienne L_v/K_v est non-ramifiée si et seulement si son conducteur est nul (on rappelle la convention $U_v^0 = U_v$).

Définition 1.2.2. (cf. [Gra03] p. 126 théorème définition 4.1 + lemme 4.2.1 p 127) Le conducteur d'une extension abélienne de corps globaux L/K est l'idéal $\mathfrak{m} = \prod_v \mathfrak{p}_v^{c_v}$, où v parcourt l'ensemble des places finies de K et où c_v est le conducteur de l'extension L_v/K_v .

On note que la définition précédente ne prend pas en compte une éventuelle ramification des places à l'infini. La proposition suivante découle immédiatement de ces définitions :

Proposition 1.2.3. *Soit $K \subset L \subset M$ une tour d'extensions de degrés finis, telle que M/K soit abélienne. Alors le conducteur de l'extension L/K divise le conducteur de l'extension M/K .*

Démonstration. Cela découle tout simplement du fait que pour toute place v de M , on a $N_{M_v/K_v}(M_v^*) \subset N_{L_v/K_v}(L_v^*)$. \square

1.2.2 Définition du groupe de classes de rayon

Une des formulations de la théorie globale du corps de classe utilise les corps de classe de rayon. La théorie du corps de classe locale établit l'existence d'une correspondance entre les sous-groupes d'indice fini de K_v^* et les extensions abéliennes de K_v . Dans la théorie globale, le groupe des idèles de K joue un rôle analogue à celui joué par K_v^* dans le cas local. Ce groupe des idèles, noté \mathcal{I}_K , est le produit restreint des K_v^* relativement à U_v , v parcourant l'ensemble des p -places de K . Un élément de $x \in \mathcal{I}_K$ est la donnée d'un élément $x_v \in \prod_v K_v^*$ tel que x_v soit une unité pour toutes les places, sauf éventuellement un nombre fini.

Définition 1.2.4. On désignera par :

- H l’extension abélienne non-ramifiée maximale de K ,
- H^{p^n} le compositum de toutes les extensions de K , dont le conducteur divise p^n ,
- \mathcal{H} la pro- p -extension abélienne non-ramifiée maximale de K ,
- \mathcal{H}^{p^n} le compositum de toutes les p -extensions de K , dont le conducteur divise p^n .
- M la pro- p -extension non ramifiée en dehors de p , maximale de K .

De sorte que les groupes de Galois $\text{Gal}(\mathcal{H}/K)$ et $\text{Gal}(\mathcal{H}^{p^n}/K)$ sont isomorphes aux p -parties respectives des groupes $\text{Gal}(H/K)$ et $\text{Gal}(H^{p^n}/K)$.

On rappelle que l’on note $\mathfrak{X} = \text{Gal}(M/K)$.

On énonce maintenant deux lemmes, qui seront fort utiles dans la suite :

Lemme 1.2.5. (*[Ser68] page 219*). Soit K_v le complété de K pour la valuation v telle que $v(p) = 1$ et $v(\pi_v) = \frac{1}{e_v}$. Alors, si $m > \frac{e_v}{p-1}$, l’application $x \rightarrow x^p$ est un isomorphisme de U_v^m dans $U_v^{m+e_v}$.

Lemme 1.2.6. Soit $K_v \subset L_v \subset M_v$ une tour d’extensions abéliennes de \mathbb{Q}_p telle que l’extension M_v/K_v soit abélienne et l’extension M_v/L_v de degré p . On note $c_{M,v}$ et $c_{L,v}$ les conducteurs respectifs des extensions M_v/K_v et L_v/K_v . Alors, si $c_{L,v} > \frac{e_v}{p-1}$, où e_v désigne l’indice de ramification de p dans l’extension K_v/\mathbb{Q}_p , on a :

$$c_{M,v} \leq c_{L,v} + e_v.$$

Démonstration. Par définition $c_{L,v}$ est le plus petit entier n tel que $U_v^n \subset N_{L_v/K_v}(L_v^*)$. De la théorie locale du corps de classes, on déduit le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & N_{M_v/K_v}(M_v^*) & \longrightarrow & K_v^* & \longrightarrow & \text{Gal}(M_v/K_v) \longrightarrow 1 \\ & & \downarrow & & \parallel & & \downarrow \\ 1 & \longrightarrow & N_{L_v/K_v}(L_v^*) & \longrightarrow & K_v^* & \longrightarrow & \text{Gal}(L_v/K_v) \longrightarrow 1 \end{array}$$

L’application du lemme du serpent au diagramme précédent donne alors immédiatement la suite exacte suivante :

$$1 \longrightarrow N_{M_v/K_v}(M_v^*) \longrightarrow N_{L_v/K_v}(L_v^*) \longrightarrow \text{Gal}(M_v/L_v) = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \longrightarrow 1.$$

Par conséquent $N_{M_v/K_v}(M_v^*)$ est un sous-groupe d'indice p de $N_{L_v/K_v}(L_v^*)$. Soient $n \in \mathbb{N}$, $n \geq c_{L,v} + e_v$ et $x \in U_v^n$. On va montrer que $x \in N_{M_v/K_v}(M_v^*)$. On peut définir à l'aide du lemme 1.2.5, l'élément $x^{\frac{1}{p}} \in U_v^{n-e_v}$. Or $n - e_v \geq c_{L,v}$ donc $x^{\frac{1}{p}} \in N_{L_v/K_v}(L_v^*)$. Pour finir, comme $N_{M_v/K_v}(M_v^*)$ est d'indice p dans $N_{L_v/K_v}(L_v^*)$, on en déduit que $x \in N_{M_v/K_v}(M_v^*)$. On a donc $U_v^n \subset N_{M_v/K_v}(M_v^*)$ pour tout entier n tel que $n \geq c_L + e_v$. On en déduit en particulier que $U_v^{c_{L,v}+e_v} \subset N_{M_v/K_v}(M_v^*)$ et, par définition du conducteur, que $c_{M,v} \leq c_{L,v} + e_v$.

□

Proposition 1.2.7. ([Gra03] p 47 corollaire 5.1.1) *Les suites exactes suivantes, issues de la théorie globale du corps de classe, permettent de caractériser les corps H^{p^n} et H :*

$$1 \longrightarrow K^* \prod_{v \nmid p} U_v \prod_{v|p} U_v^{ne_v} \longrightarrow \mathcal{I}_K \longrightarrow \text{Gal}(H^{p^n}/K) \longrightarrow 1$$

$$1 \longrightarrow K^* \prod_v U_v \longrightarrow \mathcal{I}_K \longrightarrow \text{Gal}(H/K) \longrightarrow 1$$

Le groupe de Galois $\text{Gal}(\mathcal{H}^{p^n}/K)$ sera noté \mathcal{A}_{p^n} et c'est la p -partie du groupe de Galois $\text{Gal}(H^{p^n}/K)$, groupe de classes de rayon p^n de K .

On déduit immédiatement de la définition de \mathcal{H}^{p^n} les propriétés suivantes :

Proposition 1.2.8. *Soit n un entier non-nul :*

- i) *On dispose d'une inclusion naturelle $\mathcal{H}^{p^n} \subset \mathcal{H}^{p^{n+1}}$.*
- ii) *La limite inductive $\varinjlim \mathcal{H}^{p^n}$ est égale à \mathcal{M} .*
- iii) *La limite projective $\varprojlim Cl_{p^n}(K)$ est égale à \mathfrak{X} .*

La suite exacte définissant le corps de classes de rayon p^n fait intervenir le groupe des idèles \mathcal{I}_K . Or ce groupe étant un produit infini, il est très peu commode à utiliser dès que l'on veut étudier numériquement le corps \mathcal{H}^{p^n} . Pour pallier cette difficulté, on va voir que le corps \mathcal{H}^{p^n} peut être défini par une suite exacte analogue à la suite exacte (1.1), définissant le module \mathfrak{X} .

Proposition 1.2.9. *Pour n , entier non nul, les extensions M et H^{p^n} de K sont reliées entre elles par la suite exacte suivante :*

$$1 \longrightarrow U_K^{(p^n)} \longrightarrow \prod_{v|p} U_v^{ne_v} \longrightarrow \text{Gal}(M/K) \longrightarrow \text{Gal}(H^{p^n}/K) \longrightarrow 1,$$

où $U_K^{(p^n)} = \{u \in U_K \text{ telle que } \forall v|p, u \in U_v^{ne_v}\}$.

Démonstration. De la définition des extensions M et H^{p^n} , on déduit le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & K^* \prod_{v \nmid p} U_v \prod_{v|p} 1 & \longrightarrow & \mathcal{I}_K & \longrightarrow & \text{Gal}(M/K) \longrightarrow 1 \\ & & \downarrow & & \parallel & & \downarrow \\ 1 & \longrightarrow & K^* \prod_{v \nmid p} U_v \prod_{v|p} U_v^{ne_v} & \longrightarrow & \mathcal{I}_K & \longrightarrow & \text{Gal}(H^{p^n}/K) \longrightarrow 1 \end{array}$$

Il découle immédiatement du lemme du serpent que :

$$\ker(\text{Gal}(M/K) \rightarrow \text{Gal}(H^{p^n}/K)) \cong (K^* \prod_{v \nmid p} U_v \prod_{v|p} U_v^{ne_v}) / (K^* \prod_{v \nmid p} U_v \prod_{v|p} 1).$$

On définit alors l'application :

$$\theta : (K^* \prod_{v \nmid p} U_v \prod_{v|p} U_v^{ne_v}) \rightarrow (\prod_{v|p} U_v^{ne_v}) / U_K^{(p^n)},$$

en posant pour $k(u_v) \in K^* \prod_{v \nmid p} U_v \prod_{v|p} U_v^{ne_v}$: $\theta(k(u_v)) = \overline{(u_v)_{v|p}}$, où $\overline{(u_v)_{v|p}}$ désigne la classe de $(u_v)_{v|p}$ dans $(\prod_{v|p} U_v^{ne_v}) / U_K^{(p^n)}$.

On commence par vérifier que l'application θ est bien définie, i.e. que si $k(u_v) = k'(u'_v)$ dans $K^* \prod_{v \nmid p} U_v \prod_{v|p} U_v^{ne_v}$, alors $\theta(k(u_v)) = \theta(k'(u'_v))$. Par définition, $\forall v, k(u_v) = k'(u'_v) \Leftrightarrow i_v(k)u_v = i_v(k')u'_v$, où i_v désigne le plongement de K dans K_v . On en déduit que $\forall v, i_v(k'k^{-1}) \in U_v$ et que $\forall v, v|p, i_v(k'k^{-1}) \in U_v^{ne_v}$. On a donc $k'k^{-1} \in U_K^{(p^n)}$ et $\overline{(u_v)_{v|p}} = \overline{(u'_v)_{v|p}}$. L'application θ est donc bien définie.

Il est clair que $(K^* \prod_{v \nmid p} U_v \prod_{v|p} 1) \subset \ker(\theta)$ et que l'application θ est subjective. On va montrer que $(K^* \prod_{v \nmid p} U_v \prod_{v|p} 1) = \ker(\theta)$. Soit donc $k(u_v) \in \ker(\theta)$, il existe $x \in U_K^{(p^n)}$ tel que pour tout $v|p, u_v = i_v(x)$. On considère alors l'élément $x(u'_v)$, où $u'_v = 1$, si $v|p$ et $u'_v = i_v(x)^{-1}u_v$, si $v \nmid p$. On a alors $x(u'_v) = (u_v) \Rightarrow kx(u'_v) = k(u_v)$ et comme $kx(u'_v) \in (K^* \prod_{v \nmid p} U_v \prod_{v|p} 1)$, on a bien $(K^* \prod_{v \nmid p} U_v \prod_{v|p} 1) \subset \ker(\theta)$ et finalement

$$(K^* \prod_{v \nmid p} U_v \prod_{v|p} U_v^{ne_v}) / (K^* \prod_{v \nmid p} U_v \prod_{v|p} 1) \simeq (\prod_{v|p} U_v^{ne_v}) / U_K^{(p^n)}.$$

La suite exacte

$$1 \longrightarrow U_K^{(p^n)} \longrightarrow \prod_{v|p} U_v^{ne_v} \longrightarrow \text{Gal}(M/K) \longrightarrow \text{Gal}(H^{p^n}/K) \longrightarrow 1 \quad (1.3)$$

en découle. \square

Corollaire 1.2.10. *Les extensions \mathcal{H}^{p^n} et \mathcal{M} sont reliées entre elles via la suite exacte suivante :*

$$\overline{U}_K^{(p^n)} \longrightarrow \prod_{v|p} U_v^{ne_v} \longrightarrow \mathfrak{X} \longrightarrow Cl_{p^n}(K) \longrightarrow 1, \quad (1.4)$$

où $\overline{U}_K^{(p^n)}$ désigne le pro- p -complété de $U_K^{(p^n)}$.

Pour la commodité du lecteur on redonne la démonstration de cette suite exacte.

Démonstration. On obtient la suite exacte suivante en considérant la suite pro- p -complétée de la suite exacte de la proposition 1.2.9.

$$\overline{U}_K^{(p^n)} \longrightarrow \prod_{v|p} U_v^{ne_v} \longrightarrow \mathfrak{X} \longrightarrow Cl_{p^n}(K) \longrightarrow 1,$$

En effet on peut couper la suite exacte 1.3 pour obtenir deux suites exactes à trois termes :

$$1 \longrightarrow U_K^{(p^n)} \longrightarrow \prod_{v|p} U_v^{ne_v} \longrightarrow I \longrightarrow 1$$

$$1 \longrightarrow I \longrightarrow \text{Gal}(M/K) \longrightarrow \text{Gal}(H^{p^n}/K) \longrightarrow 1$$

où I est l'image de $\prod_{v|p} U_v^{ne_v}$ dans $\text{Gal}(M/K)$.

$$\overline{U}_K^{(p^n)} \longrightarrow \prod_{v|p} U_v^{ne_v} \longrightarrow I \longrightarrow 1,$$

Pour obtenir la suite avec les pro- p -complétés. On quotientise ces deux suites par p^m et on passe à la limite projective. On regarde ce qu'il se passe en détails pour la seconde suite exacte.

$$\begin{array}{ccccccc}
 I[p^m] & \longrightarrow & \text{Gal}(M/K)[p^m] & \longrightarrow & \text{Gal}(H^{p^n}/K)[p^m] & \longrightarrow & 1 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 I & \longrightarrow & \text{Gal}(M/K) & \xrightarrow{\varphi} & \text{Gal}(H^{p^n}/K) & \longrightarrow & 1 \\
 \downarrow p^m & & \downarrow p^m & & \downarrow p^m & & \\
 I & \longrightarrow & \text{Gal}(M/K) & \longrightarrow & \text{Gal}(H^{p^n}/K) & \longrightarrow & 1
 \end{array}$$

où l'on note $I[p^m]$ (respectivement $\text{Gal}(M/K)[p^m]$ et $\text{Gal}(H^{p^n}/K)[p^m]$) la p^m torsion de I (respectivement de $\text{Gal}(M/K)$ et de $\text{Gal}(H^{p^n}/K)$).

En utilisant le lemme du serpent on obtient la suite exacte suivante.

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & I[p^m] & \longrightarrow & \text{Gal}(M/K)[p^m] & \longrightarrow & \text{Gal}(H^{p^n}/K)[p^m] \\
 & & & & & & \underbrace{\hspace{10em}}_{\longrightarrow} \\
 & & \searrow & & & & \\
 & & I/p^m & \longrightarrow & \text{Gal}(M/K)/p^m & \longrightarrow & \text{Gal}(H^{p^n}/K)/p^m \longrightarrow 0.
 \end{array} \tag{1.5}$$

Si l'on prend un élément x de $\text{Gal}(H^{p^n}/K)[p^m]$ alors on peut trouver un élément y de $\text{Gal}(M/K)$ et $z \in I$ tel que $\varphi(x) = y$ et $z = p^m y$. Et donc l'application δ_m entre $\text{Gal}(H^{p^n}/K)[p^m]$ et I/p^m est la multiplication par p^m . En considérant le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 \text{Gal}(H^{p^n}/K)[p^m] & \xrightarrow{\delta_m} & I/p^m & \longrightarrow & \text{Gal}(M/K)/p^m & \longrightarrow & \text{Gal}(H^{p^n}/K)/p^m \longrightarrow 1 \\
 \downarrow \alpha_n & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \text{Gal}(H^{p^n}/K)[p^{m-1}] & \xrightarrow{\delta_{m-1}} & I/p^{m-1} & \longrightarrow & \text{Gal}(M/K)/p^{m-1} & \longrightarrow & \text{Gal}(H^{p^n}/K)/p^{m-1} \longrightarrow 1
 \end{array}$$

On veut montrer que l'application α_n entre $\text{Gal}(H^{p^n}/K)[p^m]$ et $\text{Gal}(H^{p^n}/K)[p^{m-1}]$ qui fait commuter le diagramme est la multiplication par p . On considère x et x' des éléments de $\text{Gal}(H^{p^n}/K)[p^m]$ et de $\text{Gal}(H^{p^n}/K)[p^{m-1}]$, on a $\delta(x) = p^m x$ et $\delta_{m-1}(x') = p^{m-1} x'$ si l'on prend maintenant x' l'image de x par α alors $x' = xp$ donc α_n est la multiplication par p . Comme $\text{Gal}(H^{p^n}/K)$ est un groupe fini alors en multipliant successivement par p ces éléments sa p -partie devient triviale. Comme tous les modules sont finis, en passant à la limite projective dans la suite 1.5 on obtient la suite exacte suivante.

$$1 \longrightarrow \bar{I} \longrightarrow \mathfrak{X} \longrightarrow \mathcal{A}_{p^n} \longrightarrow 1$$

En utilisant le même procédé pour la première suite exacte on obtient :

$$\bar{U}_K^{(p^n)} \longrightarrow \prod_{v|p} U_v^{ne_v} \longrightarrow \bar{I} \longrightarrow 1,$$

En recollant maintenant ces deux suites on obtient :

$$1 \longrightarrow \bar{U}_K^{(p^n)} \longrightarrow \prod_{v|p} U_v^{ne_v} \longrightarrow \mathfrak{X} \longrightarrow Cl_{p^n}(K) \longrightarrow 1,$$

□

Remarque. Si le corps K vérifie la conjecture de Leopoldt pour p alors on a la suite exacte suivante :

$$1 \longrightarrow \bar{U}_K^{(p^n)} \longrightarrow \prod_{v|p} U_v^{ne_v} \longrightarrow \mathfrak{X} \longrightarrow Cl_{p^n}(K) \longrightarrow 1,$$

En effet, la conjecture de Leopoldt est équivalente à l'exactitude à gauche pour tout n .

1.3 Test pour vérifier la conjecture de Leopoldt

Dans cette partie, on expose une méthode pour vérifier la conjecture de Leopoldt pour un nombre premier et un corps de nombres K donnés. L'idée de cette méthode est que la connaissance de \mathcal{A}_{p^n} et $\mathcal{A}_{p^{n+1}}$ pour $n >> 0$ permet de calculer le nombre de \mathbb{Z}_p -extensions de K . On commence par regarder sur quelques exemples puis on donnera des arguments théoriques pour justifier cette méthode. Dans le chapitre suivant, on verra que la connaissance de \mathcal{A}_{p^n} permet aussi de déterminer la structure de \mathcal{T}_p .

On note \tilde{K} , le compositum de toutes les \mathbb{Z}_p -extensions de K et r le \mathbb{Z}_p -rang de \mathfrak{X} . La conjecture de Leopoldt prédit que cet entier r est égal à $r_2 + 1$. On considère le corps $K = \mathbb{Q}(\sqrt{7})$, dans cet exemple le théorème 1.1.3 donne la conjecture, on peut aussi la vérifier expérimentalement. En utilisant le logiciel pari-GP, on voit que les 3-parties des groupes de classe de rayon 3^n de K pour $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ sont respectivement :

n	\mathcal{A}_{p^n}
0	1
1	1
2	$(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$
3	$(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})$
4	$(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/27\mathbb{Z})$
5	$(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/81\mathbb{Z})$

Cet exemple nous invite à penser que la conjecture de Leopoldt est vraie pour K et $p = 3$. En effet, la partie \mathcal{A}_{p^n} qui semble provenir des \mathbb{Z}_p -extensions est de rang 1 (la partie qui grandit à chaque étage) donc le nombre \mathbb{Z}_p serait 1 qui est bien égal à $r_2 + 1$ car ici r_2 vaut 0. La torsion \mathfrak{T} serait alors la partie qui reste stable c'est à dire $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$. On va maintenant voir un exemple non abélien. On considère maintenant le corps $\mathbb{Q}(\sqrt[5]{6})$. On voit que les 5-parties des groupes de classe de rayon 5^n de K pour $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ sont respectivement :

n	\mathcal{A}_{p^n}
0	1
1	$(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^3$
2	$(\mathbb{Z}/25\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2$
3	$\mathbb{Z}/1(25\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/25\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$
4	$(\mathbb{Z}/625\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/125\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$
5	$(\mathbb{Z}/3215\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/625\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$

Ici r_2 est égal à 2. Comme dans l'exemple précédent, on voit que la partie dont les invariants sont multipliés par 5 à chaque étage est de rang 3 ($=r_2+1$) donc la conjecture de Leopoldt semble vraie et la partie de torsion de \mathfrak{T} serait $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$. Ceci nous amène à nous poser deux questions :

Question 1. Pour $n >> 0$, le noyau de la surjection canonique $\mathcal{A}_{p^{n+1}} \twoheadrightarrow \mathcal{A}_{p^n}$ est-il isomorphe à $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^r$, où r est le nombres de \mathbb{Z}_p -extensions de K ?

Question 2. Si pour un certain n , le noyau de la surjection canonique $\mathcal{A}_{p^{n+1}} \twoheadrightarrow \mathcal{A}_{p^n}$ est isomorphe à $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{r_2+1}$ alors la conjecture de Leopoldt est-elle vérifiée ?

Les extensions \mathcal{H}^{p^n} , M et \tilde{K} sont reliées entre elles suivant le diagramme d'extensions suivant :

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{K} & \longrightarrow & \tilde{K}\mathcal{H}^{p^n} & \longrightarrow & M \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ \tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^n} & \longrightarrow & \mathcal{H}^{p^n} & & \\ \downarrow & & & & \\ K & & & & \end{array}$$

Pour n assez grand, on a $\text{Gal}(\mathcal{H}^{p^n}/\tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^n}) \simeq \mathcal{T}_p$, la détermination explicite d'un entier n_0 tel que $\text{Gal}(\mathcal{H}^{p^{n_0}}/\tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^{n_0}}) \simeq \mathcal{T}_p$ est a priori difficile. Après avoir exposé une méthode qui permet de vérifier si la conjecture de Leopoldt est vraie pour un corps et un premier donnés, on verra que la connaissance, pour $n \geq n_0$, des facteurs invariants des groupes $Cl_{p^n}(K)$ et $Cl_{p^{n+1}}(K)$ permet de déterminer ceux de \mathcal{T}_p . Puis nous expliquerons comment déterminer explicitement un tel entier n_0 .

1.3.1 Propriétés de stabilisation de $Cl_{p^n}(K)$

L'objectif est ici de démontrer la proposition suivante, qui répond à la première question posée. Pour simplifier on notera $Y_n = \ker(Cl_{p^{n+1}}(K) \rightarrow Cl_{p^n}(K))$.

Proposition 1.3.1. *Pour tout entier n tel que $\tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^n}/\tilde{K} \cap \mathcal{H}^p$ soit ramifiée en toutes les places au dessus de p dans K , alors $Y_n \twoheadrightarrow (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^r$.*

On commence par démontrer le lemme suivant :

Lemme 1.3.2. *Soit p un nombre premier et K un corps de nombres. On considère le diagramme suivant :*

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^{n+1}} & \longrightarrow & \mathcal{H}^{p^n}(\tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^{n+1}}) & \longrightarrow & \mathcal{H}^{p^{n+1}} \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ \tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^n} & \longrightarrow & \mathcal{H}^{p^n} & & \\ \downarrow & & & & \\ K & & & & \end{array} \tag{1.6}$$

Si l'extension $\tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^n}/\tilde{K} \cap \mathcal{H}^p$ est ramifiée en une place v au-dessus de p alors $c_{n,v} > \frac{e_v}{p-1}$, où $c_{n,v}$ est le conducteur local en v de l'extension $\tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^n}/K$.

Démonstration. Comme $\tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^n}/\tilde{K} \cap \mathcal{H}^p$ est ramifiée en v , il existe m tel que $n \geq m \geq 2$, tel que $\tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^{m-1}}/\tilde{K} \cap \mathcal{H}^p$ soit non-ramifiée en v et tel que $\tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^m}/\tilde{K} \cap \mathcal{H}^p$ soit ramifiée en v . Alors le conducteur local $c_{m,v} > (m-1)e_v$ où e_v l'indice de ramification de v dans $\tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^m}/\tilde{K} \cap \mathcal{H}^p$ or $m \geq 2$ donc $n_{m,v} > (m-1)e_v \geq e_v \geq \frac{e_v}{p-1}$. Puisque le conducteur de l'extension $\tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^n}/K$ divise le conducteur de $\tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^m}/K$, le résultat suit. \square

Remarque. Si de plus l'extension $\tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^n}/\tilde{K} \cap \mathcal{H}^p$ est ramifiée en toutes les places au-dessus de p alors on obtient facilement une minoration de tous les conducteurs locaux. On va voir que la détermination de cette extension permet le calcul de $\text{tor}_{\mathbb{Z}_p}(\mathfrak{X})$.

Démonstration de la proposition. On considère le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 \tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^n} & \longrightarrow & (\tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^n})\mathcal{H}^p & \longrightarrow & \mathcal{H}^{p^n} & & (1.7) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow Y_{n-1} & & \\
 \tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^{n-1}} & \longrightarrow & (\tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^{n-1}})\mathcal{H}^p & \longrightarrow & \mathcal{H}^{p^{n-1}} & & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 \tilde{K} \cap \mathcal{H}^p & \longrightarrow & \mathcal{H}^p & & & & \\
 \downarrow & & & & & & \\
 K & & & \nearrow \mathcal{A}_{p^{n-1}} & \nearrow \mathcal{A}_{p^n} & &
 \end{array}$$

On note tout d'abord que $\text{Gal}(\tilde{K}/K) = \mathbb{Z}_p^r$.

Il est clair que $Y_n \twoheadrightarrow \text{Gal}(\tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^{n+1}}/\tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^n})$. Or $\text{Gal}(\tilde{K}/\tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^n})$ est un sous \mathbb{Z}_p -module de $\text{Gal}(\tilde{K}/K) = \mathbb{Z}_p^r$ de corang nul, il est donc isomorphe à \mathbb{Z}_p^r . Il existe donc r extensions de $\tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^n}$, disons M_1, M_2, \dots, M_r , contenues dans \tilde{K} telles que $\text{Gal}(M_i/\tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^n}) \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et $\text{Gal}(M_1 \cdots M_r/\tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^n}) \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^r$.

Or le conducteur de l'extension $\tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^n}/K$ divise $p^n = \prod_{v|p} \mathfrak{p}_v^{ne_v}$. De plus, l'hypothèse sur $\tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^n}/\tilde{K} \cap \mathcal{H}^p$ assure que l'on peut utiliser le lemme 1.2.6 et par conséquent le conducteur de l'extension M_i/K divise $\prod_{v|p} \mathfrak{p}_v^{ne_v + e_v} = p^{n+1}$. En d'autres termes, $M_i \subset \mathcal{H}^{p^{n+1}}$ pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$. La surjection

1.4. MÉTHODE POUR VÉRIFIER LA CONJECTURE DE LEOPOLDT25

annoncée en découle.

□

On en déduit immédiatement le corollaire suivant :

Corollaire 1.3.3. *On a vu que le cardinal de Y_n est supérieur à p^r . On suppose que l'extension $\tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^n}/\tilde{K} \cap \mathcal{H}^p$ est ramifiée en toutes les places au-dessus de p , et que le cardinal de Y_n est exactement p^r . Alors $Y_n \simeq \text{Gal}(\tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^{n+1}}/\tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^n})$.*

Démonstration. En effet, d'après le diagramme (1.6), on dispose d'une surjection $Y_n \twoheadrightarrow \text{Gal}(\tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^{n+1}}/\tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^n})$. Or on vient de voir que $\text{Gal}(\tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^{n+1}}/\tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^n}) \twoheadrightarrow (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^r$. Ces groupes étant finis et, par hypothèse équipotents, les surjections considérées sont des isomorphismes. □

Théorème 1.3.4. *Si l'extension $\tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^n}/\tilde{K} \cap \mathcal{H}^p$ est ramifiée en toutes les places au-dessus de p , et que le cardinal de Y_n est exactement p^{r_2+1} alors la conjecture de Leopoldt est vraie pour K et p .*

Démonstration. En effet on sait que $r_2 + 1 \leq r$ et d'après le corollaire 1.3.3 si $\#(Y_n) = r_2 + 1$ alors $r \leq r_2 + 1$, et donc égal à $r_2 + 1$, ainsi K vérifie la conjecture de Leopoldt. □

1.4 Méthode pour vérifier la conjecture de Leopoldt

Dans [?] Buchmann et Sanss donne un algorithme qui permet de tester si la conjecture de Leopoldt est vrai pour un corps de nombres et un nombre premier donnés. On donne une autre méthode qui permet aussi de vérifier cette conjecture en utilisant le théorème précédent. Pour $n, 1, 2, \dots$, on calcule successivement \mathcal{A}_{p^n} jusqu'à ce que $\#\mathcal{A}_{p^n} \times p^{r_2+1} = \#\mathcal{A}_{p^{n+1}}$ et l'on vérifie que l'extension $\tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^n}/\tilde{K} \cap \mathcal{H}^p$ est ramifiée en toutes les places au-dessus de p . Nous expliquerons dans la suite comment déterminer un entier à partir duquel l'extension $\tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^n}/\tilde{K} \cap \mathcal{H}^p$ est ramifiée en toutes les places au-dessus de p . Alors on peut conclure que la conjecture de Leopoldt est vraie pour le corps et le premier considéré.

Remarque. Si un corps ne vérifie pas la conjecture de Leopoldt pour un premier donné alors $\#\mathcal{A}_{p^n} \times p^{r_2+1} < \#\mathcal{A}_{p^{n+1}}$ et donc l'algorithme ne s'arrêtera

jamais. Il est donc impossible avec cet algorithme de montrer qu'un corps ne vérifie pas la conjecture de Leopoldt.

Prenons tout de suite un exemple pour expliquer cette méthode. On considère le corps K associé au polynôme irréductible $x^7 - 5x + 1$. Utilisant le logiciel pari-GP, on s'aperçoit que $r_2 = 2$, que les 2-parties des groupes de classe de rayon 2^n de K pour $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ sont respectivement :

n	$Cl_{p^n}(K)$
0	1
1	1
2	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$
3	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$
4	$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
5	$\mathbb{Z}/16\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^2 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

$\#\mathcal{A}_{2^3} = 32$ et $\#\mathcal{A}_{2^4} = 256$ ainsi $\#\mathcal{A}_{2^4} = 32 \times 2^3 = \#\mathcal{A}_{2^3} \times 2^{r_2+1}$ On peut donc conclure que ce corps vérifie la conjecture pour $p = 2$.

1.5 Critère équivalent

On a vu dans la section 1.3 un test pour vérifier la conjecture de Leopoldt (théorème 1.3.4). Dans cette section on donne un lien Y_n et les unités

Définition 1.5.1. Soit p un nombre premier. On note $U_n = \{x \in K, x \equiv 1 \pmod{p^n}\}$.

Lemme 1.5.2. *On a la suite exacte suivante :*

$$1 \rightarrow U_n/U_{n+1} \rightarrow (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{r_1+2r_2} \rightarrow Y_n \rightarrow 1$$

Démonstration. On considère maintenant la suite suivante que l'on écrit deux fois.

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & U_K/U_{n+1} & \longrightarrow & U_K/p^{n+1} & \longrightarrow & Cl_{p^{n+1}} \longrightarrow Cl_K \longrightarrow 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 1 & \longrightarrow & U_K/U_n & \longrightarrow & U_K/p^n & \longrightarrow & Cl_{p^n} \longrightarrow Cl_K \longrightarrow 1 \end{array}$$

On cherche maintenant les noyaux de toutes les restrictions entre ces deux suites.

$$\begin{array}{ccccccc}
 U_n/U_{n+1} & (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{r_1+2r_2} & Y_n & & & & \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow & & & & \\
 1 \longrightarrow U_K/U_{n+1} \longrightarrow O_K/p^{n+1} \longrightarrow Cl_{p^{n+1}} \longrightarrow Cl_K \longrightarrow 1 & & & & & & \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \parallel & & \\
 1 \longrightarrow U_K/U_n \longrightarrow O_K/p^n \longrightarrow Cl_{p^n} \longrightarrow Cl_K \longrightarrow 1 & & & & & & \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow & & & & \\
 1 & 1 & 1 & & & &
 \end{array}$$

On doit juste décrire le noyau de l'application de $O_K/p^{n+1} \rightarrow O_K/p^n$. Ce noyau est p^{n+1}/p^n qui est isomorphe à O_K/p . Or O_K est un \mathbb{Z} -module libre de rang $r_1 + 2r_2$. On obtient donc que le noyau de $O_K/p^{n+1} \rightarrow O_K/p^n$ est isomorphe à $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{r_1+2r_2}$. On coupe maintenant ce diagramme en deux pour pouvoir appliquer le lemme du serpent.

$$\begin{array}{ccccccc}
 U_n/U_{n+1} & (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{r_1+2r_2} & Z_n & & & & \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow & & & & \\
 1 \longrightarrow U_K/U_{n+1} \longrightarrow O_K/p^{n+1} \longrightarrow I_{n+1} \longrightarrow 1 & & & & & & \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow & & & & \\
 1 \longrightarrow U_K/U_n \longrightarrow O_K/p^n \longrightarrow I_n \longrightarrow 1 & & & & & & \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow & & & & \\
 1 & 1 & 1 & & & &
 \end{array}$$

où I_n est l'image de $O_K/p^n \rightarrow Cl_{p^n}$ est donc aussi le noyau de $Cl_{p^n} \rightarrow Cl_K$ et Z_n le noyau de l'application de $I_{n+1} \rightarrow I_n$.

Donc d'après le lemme du serpent on a :

$$1 \rightarrow U_n/U_{n+1} \rightarrow (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{r_1+2r_2} \rightarrow Z_n \rightarrow 1$$

dans l'autre morceau du diagramme on obtient

$$\begin{array}{ccccccc}
 & Z_n & & Y_n & & & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & & \\
 1 & \longrightarrow & I_{n+1} & \longrightarrow & Cl_{p^{n+1}} & \longrightarrow & Cl_K \longrightarrow 1 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \parallel & \\
 1 & \longrightarrow & I_n & \longrightarrow & Cl_{p^n} & \longrightarrow & Cl_K \longrightarrow 1 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & & \\
 & 1 & & 1 & & &
 \end{array}$$

En utilisant à nouveau le lemme du serpent on obtient que Z_n et Y_n sont isomorphes. Ainsi on a :

$$1 \rightarrow U_n/U_{n+1} \rightarrow (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{r_1+2r_2} \rightarrow Y_n \rightarrow 1$$

□

Théorème 1.5.3. *On rappelle que l'on note $q_n = \#(Y_n)$, La suite $(q_n)_{n \geq 1}$ est une suite décroissante.*

Démonstration. On considère l'élévation à la puissance p entre U_{n_0}/U_{n_0+1} et U_{n_0+1}/U_{n_0+2} . Soit $x \in U_n$ alors x peut s'écrire $x = 1 + p^n y$ où y est une unité. Donc

$$\begin{aligned}
 x^p &= 1 + p^{n+1}y + \sum_{k=2}^{p-1} \binom{p}{k} (p^n y)^k \\
 &= 1 + p^{n+1}y + p^{n+2} \left(\sum_{k=2}^{p-1} \binom{p}{k} p^{n(k-1)-2} y^k \right).
 \end{aligned}$$

Et donc $x^p \in U_{n+1}$. Si l'on prend $x \in U_n$ et $x \notin U_{n+1}$ alors y n'est pas divisible par p et le calcul précédent montre que $x^p \notin U_{n+2}$ donc l'élévation à la puissance p est injective. Ainsi le cardinal de U_n/U_{n+1} croît. En utilisant la suite exacte du lemme 1.5 on peut donc conclure que la suite $(q_n)_{n \geq 1}$ décroît.

Avec la suite exacte du lemme 1.5 :

$$1 \rightarrow U_n/U_{n+1} \rightarrow (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{r_1+2r_2} \rightarrow Y_n \rightarrow 1.$$

On s'aperçoit que le cardinal de Y_n dépend de l'indice de U_{n+1} dans U_n . En effet si $\#(Y_n) = p^{r_2+1}$ alors le cardinal de U_n/U_{n+1} est $p^{r_1+r_2-1}$ on retrouve ainsi le lien avec les unités. □

En supposant que la conjecture de Leopoldt est vraie et en utilisant l'application d'Artin, on peut démontrer plus rapidement que la suite (q_n) décroît en montrant qu'il existe une surjection de Y_n sur Y_{n+1} .

Proposition 1.5.4. *On suppose que le corps K vérifie la conjecture de Leopoldt. Alors l'élévation à la puissance p induit, via l'application d'Artin, une surjection de Y_n sur Y_{n+1} .*

Démonstration. Comme le corps K vérifie la conjecture de Leopoldt, d'après la remarque 1.2.2, on peut considérer la suite exacte définissant la p -partie du groupe de classe de rayon p^n :

$$1 \longrightarrow \overline{U}_K^{(p^n)} \longrightarrow \prod_{v|p} U_v^{ne_v} \longrightarrow \mathfrak{X} \longrightarrow Cl_{p^n}(K) \longrightarrow 1.$$

On note $\mathcal{Q}_n = \prod_{v|p} U_v^{ne_v} / \overline{U}_K^{(p^n)}$. On a alors $\mathcal{Q}_n = \text{Gal}(M/\mathcal{H}^{p^n})$. Par conséquent $\mathcal{Q}_n / \mathcal{Q}_{n+1} = Y_n \simeq \text{Gal}(\mathcal{H}^{p^{n+1}} / \mathcal{H}^{p^n})$. Les relations entre toutes ces extensions sont rappelées dans le diagramme qui suit :

$$\begin{array}{c} M \\ \mathcal{Q}_{n+1} \left(\begin{array}{c|c} & \\ \hline & \end{array} \right) \mathcal{Q}_n \\ \mathcal{H}^{p^{n+1}} \\ Y_n \left(\begin{array}{c|c} & \\ \hline & \end{array} \right) \mathcal{Q}_n \\ \mathcal{H}^{p^n} \\ \downarrow \\ K \end{array}$$

On rappelle que $\mathcal{Q}_n = \prod_{v|p} U_v^{ne_v} / \overline{U}_K^{(p^n)} = \ker(\mathfrak{X} \rightarrow Cl_{p^n}(K))$ et on considère le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & \mathcal{Q}_{n+1} & \longrightarrow & \mathfrak{X} & \longrightarrow & Cl_{p^{n+1}}(K) \longrightarrow 1 \\ & & \downarrow & & \parallel & & \downarrow \\ 1 & \longrightarrow & \mathcal{Q}_n & \longrightarrow & \mathfrak{X} & \longrightarrow & Cl_{p^n}(K) \longrightarrow 1 \end{array}$$

On en déduit que $Y_n = \mathcal{Q}_n / \mathcal{Q}_{n+1}$. Or, n non-nul implique trivialement que $n > \frac{1}{p-1}$. L'élévation à la puissance p réalise donc un isomorphisme

de $\prod_{v|p} U_v^{ne_v}$ sur $\prod_{v|p} U_v^{ne_v+e_v}$. Cet isomorphisme induit aussi une surjection de \mathcal{Q}_n sur \mathcal{Q}_{n+1} . On considère finalement le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & \mathcal{Q}_{n+1} & \longrightarrow & \mathcal{Q}_n & \longrightarrow & \mathcal{Q}_n/\mathcal{Q}_{n+1} \longrightarrow 1 \\ & & \downarrow (.)^p & & \downarrow (.)^p & & \downarrow (.)^p \\ 1 & \longrightarrow & \mathcal{Q}_{n+2} & \longrightarrow & \mathcal{Q}_{n+1} & \longrightarrow & \mathcal{Q}_{n+1}/\mathcal{Q}_{n+2} \longrightarrow 1 \end{array}$$

On déduit du lemme du serpent que la flèche verticale de droite est une surjection de $\mathcal{Q}_n/\mathcal{Q}_{n+1}$ sur $\mathcal{Q}_{n+1}/\mathcal{Q}_{n+2}$, i.e. de $\ker(Cl_{p^{n+1}}(K) \rightarrow Cl_{p^n}(K))$ sur $\ker(Cl_{p^{n+2}}(K) \rightarrow Cl_{p^{n+1}}(K))$. \square

Chapitre 2

Calcul de la torsion de \mathfrak{X}

2.1 Introduction

Soit p un nombre premier et un corps K de nombres. On désigne par \mathcal{M} la pro- p -extension abélienne non-ramifiée en dehors de p , maximale de K . L'objectif de ce chapitre est d'étudier le \mathbb{Z}_p -module $\mathfrak{X} = \text{Gal}(M/K)$ et de déterminer une méthode permettant de calculer effectivement la structure de ce \mathbb{Z}_p -module. Ce module est décrit par la suite exacte suivante, issue de la théorie du corps de classes :([Gra03] p. 294)

$$\overline{U}_K \longrightarrow \prod_{v|p} U_v^1 \longrightarrow \mathfrak{X} \longrightarrow \text{Gal}(H_0/K) \longrightarrow 1 \quad (2.1)$$

D'après le théorème de structure des \mathbb{Z}_p -modules de type fini, \mathfrak{X} est produit direct d'une partie libre, \mathbb{Z}_p^r et d'une partie de torsion, que l'on notera \mathcal{T}_p . On s'intéressera dans ce chapitre au calcul explicite de ce module de torsion. Afin d'éviter toute ambiguïté, on précise d'emblée que par calcul explicite, on entend écrire un programme pari-GP calculant \mathcal{T}_p , pour un corps K et un premier p étant donnés.

Une approche pour calculer cette torsion peut être la suivante : on note \tilde{K} le compositum de toutes les \mathbb{Z}_p -extensions de K et H_0 la p -extension abélienne non-ramifiée maximale de K . On sait, via la théorie du corps de classes, que le groupe $\text{Gal}(M/H_0)$ est isomorphe au quotient $\mathcal{U} := \prod_{v|p} U_v^1 / \overline{U}_K$. Le module de torsion \mathcal{T}_p est alors décrit par la suite exacte suivante :

$$1 \longrightarrow \text{tor}_{\mathbb{Z}_p}(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathcal{T}_p \longrightarrow \text{Gal}(H_0 \tilde{K} / \tilde{K}) \longrightarrow 1. \quad (2.2)$$

La situation entre les différentes extensions apparaissant dans la suite exacte (2.2) est résumée par le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathcal{T}_p & & \\
 & \swarrow & & \searrow & \\
 \tilde{K} & \xrightarrow{\quad} & \tilde{K}H_0 & \xrightarrow{\quad} & M \\
 \downarrow & & \downarrow \text{tor}_{\mathbb{Z}_p}(\mathcal{U}) & & \\
 \tilde{K} \cap H_0 & \xrightarrow{\quad} & H_0 & \xrightarrow{\quad} & \\
 \downarrow & & \downarrow \mathcal{U} & & \\
 K & & & &
 \end{array} \tag{2.3}$$

Une première idée pour déterminer explicitement \mathcal{T}_p est de calculer les termes extrémaux de la suite exacte (2.2). Mais ce calcul n'est pas toujours aisé car la suite exacte n'étant pas toujours scindée cela ne permet pas toujours d'achever le calcul de la torsion et surtout les termes extrémaux ne sont pas toujours facilement calculables.

On va donc aborder le problème sous un autre angle. Partant du fait que le \mathbb{Z}_p -module \mathfrak{X} est la limite projective des p -parties des groupes de classe de rayon p^n , $Cl_{p^n}(K)$, on a étudié les propriétés de stabilisation de ces groupes ainsi que le comportement des facteurs invariants de $Cl_{p^n}(K)$ lorsque n croît. De cette étude, on en a déduit une méthode permettant de déterminer explicitement \mathcal{T}_p .

Avant d'aborder la partie technique, à savoir le calcul effectif de \mathcal{T}_p , on va rappeler quelques résultats qui montrent que la connaissance de \mathcal{T}_p permet d'obtenir de nombreuses informations sur le corps K . Ces motivations étant exposées, on rappellera la définition ainsi que quelques propriétés élémentaires du groupe de classe de rayon p^n .

Une fois la méthode de calcul théoriquement justifiée, on illustrera ce calcul avec quelques cas particuliers et on tentera de donner une explication heuristique aux phénomènes observés.

2.1.1 Motivation du problème

Le calcul de \mathcal{T}_p permet d'obtenir des informations d'une part sur la p -rationalité du corps K et d'autre part sur la Λ -liberté du module d'Iwasawa non-ramifié en dehors de p , \mathfrak{X}_∞ associé au corps K .

Corps p -rationnels

On note G_{S_p} , le groupe de Galois de la pro- p -extension, non-ramifiée en dehors de p , maximale de K . On dit que le corps K est p -rationnel si et seulement si le groupe G_{S_p} est libre.

On peut montrer que la liberté de ce groupe est équivalente à la conjecture de Leopoldt et à la trivialité du groupe de cohomologie $H^2_{cont}(G_{S_p}, \mathbb{Z}_p)$. (voir [MNQD90] théorème-définition 2.1 p. 162).

Or ce groupe de cohomologie continu est relié au module \mathfrak{X}_0 . En effet, sa \mathbb{Z}_p -torsion est isomorphe au dual de Pontryagin du groupe de cohomologie continu $H^2_{cont}(G_{S_p}, \mathbb{Z}_p)$. En conséquence, pour un corps K donné vérifiant la conjecture de Leopoldt, le calcul de la \mathbb{Z}_p -torsion du groupe de Galois \mathfrak{X}_0 permet de déterminer si le corps considéré est p -rationnel.

Λ -liberté de \mathfrak{X}_∞

On rappelle brièvement une construction de \mathfrak{X}_∞ . Pour $n \in \mathbb{N}$, on note K_n le n -ième étage de la \mathbb{Z}_p -extension cyclotomique de K et M_n la pro- p -extension abélienne non-ramifiée en dehors de p maximale de K_n . La limite inductive des M_n , notée M_∞ , correspond à la pro- p -extension abélienne non-ramifiée en dehors de p maximale de K_∞ . On note $\mathfrak{X}_\infty = \text{Gal}(M_\infty/K_\infty)$, qui est aussi la limite projective relativement à la restriction des $\mathfrak{X}_n = \text{Gal}(M_n/K_n)$. Le groupe de Galois \mathfrak{X}_∞ est un \mathbb{Z}_p -module sur lequel $\Gamma := \text{Gal}(K_\infty/K)$ opère. Il est donc naturellement muni d'une structure de Λ -module, où Λ désigne l'anneau $\mathbb{Z}_p[[T]]$ des séries formelles en T à coefficients dans \mathbb{Z}_p .

Si K vérifie la conjecture de Leopoldt, alors le calcul de $\text{tor}_{\mathbb{Z}_p}(\mathfrak{X}_0)$ permet de déterminer la Λ -liberté de \mathfrak{X}_∞ . En effet la conjecture de Leopoldt est équivalente à $(\mathfrak{X}_\infty)^\Gamma = 1$ et on a $\text{tor}_{\mathbb{Z}_p}(\mathfrak{X}_\infty)_\Gamma = \text{tor}_{\mathbb{Z}_p}(\mathfrak{X}_0)$

2.2 Comportement asymptotique de \mathcal{A}_{p^n}

On suppose maintenant que le corps K vérifie la conjecture de Leopoldt. On note que si le corps K ne vérifie pas la conjecture de Leopoldt l'algorithme que l'on propose ensuite pour calculer la torsion ne s'arrêtera pas. Les exemples étudiés amènent à se poser la question suivante :

Question 3. On suppose que le noyau de la surjection canonique $\mathcal{A}_{p^{n+1}} \twoheadrightarrow$

\mathcal{A}_{p^n} est isomorphe à $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{r_2+1}$. A-t-on

$$\mathcal{T}_p \simeq \text{Gal}(\mathcal{H}^{p^n}/\mathcal{H}^{p^n} \cap \tilde{K}) \quad ?$$

Relativement au diagramme qui précède, on note que puisque \mathfrak{X} est un \mathbb{Z}_p -module abélien de type fini, il est produit direct de sa partie libre par sa partie de torsion. En d'autres termes, il existe une extension finie M' de K telle que $\tilde{K}M' = M$ et $\text{Gal}(M'/K) \simeq \mathcal{T}_p$. L'extension M' étant non-ramifiée en dehors de p , on a pour $n >> 0 : M' \subset \mathcal{H}^{p^n}$, et par conséquent $\tilde{K}\mathcal{H}^{p^n} = M$.

Il reste maintenant à vérifier que si $Y_{n_0} \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{r_2+1}$ pour un certain n_0 , alors $Y_n \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{r_2+1}$ pour tout entier $n \geq n_0$. A cette fin, on considère la suite exacte définissant la p -partie du groupe de classe de rayon p^n :

$$1 \longrightarrow \overline{U}_K^{(p^n)} \longrightarrow \prod_{v|p} U_v^{ne_v} \longrightarrow \mathfrak{X} \longrightarrow Cl_{p^n}(K) \longrightarrow 1,$$

D'après le théorème 1.5.3, la conjecture de Leopoldt entraîne la décroissance du cardinal des Y_n .

Le théorème suivant permet de répondre à la question posée :

Théorème 2.2.1. *On rappelle que Y_n désigne $\ker(Cl_{p^{n+1}}(K) \rightarrow Cl_{p^n}(K))$. Il existe un entier n_0 tel que $Y_{n_0} \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{r_2+1}$. De plus, pour tout entier $n \geq n_0$, le module $\mathcal{Q}_n = \text{Gal}(M/\mathcal{H}^{p^n})$ est \mathbb{Z}_p -libre de rang $r_2 + 1$ et :*

$$Y_n \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{r_2+1}.$$

Démonstration. Le \mathbb{Z}_p -module de type fini \mathfrak{X} est isomorphe au produit direct de sa torsion et de $\mathbb{Z}_p^{r_2+1}$. Un isomorphisme étant fixé, on peut identifier $\mathbb{Z}_p^{r_2+1}$ à un sous groupe de \mathfrak{X} et donc définir, via la théorie de Galois, une extension M' de K telle que $\text{Gal}(M'/K) \simeq \mathcal{T}_p$ et $\tilde{K}M' = M$. Cette extension étant non-ramifiée en dehors de p , il existe un entier n_1 tel que $M' \subset \mathcal{H}^{p^{n_1}}$ et par conséquent $\mathcal{H}^{p^{n_1}}\tilde{K} = M$. De plus pour tout entier $n \geq n_1$, $\text{Gal}(M/\mathcal{H}^{p^n})$ est un sous-module de corang nul de $\text{Gal}(M/M') = \mathbb{Z}_p^{r_2+1}$, par conséquent $\mathcal{Q}_n = \text{Gal}(M/\mathcal{H}^{p^n}) \simeq \mathbb{Z}_p^{r_2+1}$. Le \mathbb{Z}_p -module \mathcal{Q}_n est donc libre de rang $r_2 + 1$. Par ailleurs, on sait qu'il existe un entier n_2 tel que $\ker(Cl_{p^{n+1}}(K) \rightarrow Cl_{p^n}(K))$ se surjecte sur $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{r_2+1}$ pour tout entier $n \geq n_2$ (on peut choisir pour n_2 le minimum des entiers n tels que les conducteurs des extensions $\tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^n}/K$ soient supérieurs ou égaux à $\frac{e}{p-1}$ et cela pour toute p -place v). Enfin, on remarque que puisque l'élévation à la puissance p réalise un isomorphisme entre $U_v^{ne_v}$ et $U_v^{ne_v+e_v}$, le quotient $\mathcal{Q}_n/\mathcal{Q}_{n+1}$, qui est isomorphe à

$\ker(Cl_{p^{n+1}}(K) \rightarrow Cl_{p^n}(K))$, est tué par p .

On pose $n_0 = \text{Max}(n_1, n_2)$ et on se donne maintenant un entier $n \geq n_0$. Le noyau $\ker(Cl_{p^{n+1}}(K) \rightarrow Cl_{p^n}(K))$ est donc un quotient de $\mathbb{Z}_p^{r_2+1}$, qui se surjecte sur $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{r_2+1}$ et qui est tué par p . On a alors nécessairement $\ker(Cl_{p^{n+1}}(K) \rightarrow Cl_{p^n}(K)) \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{r_2+1}$. \square

On commence par rappeler la définition des facteurs invariants d'un groupe abélien G :

Définition 2.2.2. Étant donné un groupe abélien fini G , il existe une unique suite a_1, \dots, a_t telle que :

- $G \simeq \prod_{i=1}^t \mathbb{Z}/a_i\mathbb{Z}$
- $a_i | a_{i+1}$ pour $i \in \{1, \dots, t-1\}$.

Les a_i sont appelés facteurs invariants du groupe G et ne dépendent que de la classe d'isomorphisme de G .

On note que contrairement à l'usage, le logiciel pari-GP utilise la convention $a_{i+1}|a_i$ pour des raisons pratiques.

Si G est un p -groupe, ses facteurs invariants sont des puissances de p . Pour alléger la rédaction de la suite du paragraphe, on introduit la notation suivante :

Notation : Si les facteurs invariants d'un groupe G sont a_1, \dots, a_t , on notera $\mathcal{FI}(G) = [a_1, \dots, a_t]$.

En pratique, on est en mesure de déterminer les facteurs invariants de $Cl_{p^n}(K)$. On va voir dans cette sous-section que la connaissance des facteurs invariants de $Cl_{p^n}(K)$ pour $n \gg 0$, combinée à l'utilisation des propriétés de stabilisation de $Cl_{p^n}(K)$, permet de déterminer explicitement les facteurs invariants et donc la structure de \mathcal{T}_p .

On rappelle que pour $n \gg 0$, $Cl_{p^n}(K)$ est isomorphe au produit direct de $\text{Gal}(\tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^n}/K)$ et de $\text{Gal}(\mathcal{H}^{p^n}/\tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^n}) = \mathcal{T}_p$. On va donc au préalable étudier un peu plus finement la structure de $\text{Gal}(\tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^n}/K)$.

Proposition 2.2.3. Soit n_0 tel que $\tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^n}/\tilde{K} \cap \mathcal{H}^p$ soit ramifiée en toutes les places au-dessus de p et

$$Y_n \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{r_2+1}.$$

Alors pour tout entier $n \geq n_0$,

$$\text{Gal}(\tilde{K}/\tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^{n+1}}) = p \text{Gal}(\tilde{K}/\tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^n}).$$

(on rappelle que $Y_n = \ker(Cl_{p^{n+1}}(K) \rightarrow Cl_{p^n}(K))$).

Démonstration. En vertu du théorème 2.2.1, d'une part le module \mathcal{Q}_n est \mathbb{Z}_p -libre de rang $r_2 + 1$ et d'autre part $Y_n = \mathcal{Q}_n/\mathcal{Q}_{n+1} \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{r_2+1}$. On a alors nécessairement $\mathcal{Q}_{n+1} = p\mathcal{Q}_n$. Considérant alors le diagramme suivant,

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{K} & \xrightarrow{\quad} & M \\
 \downarrow & \mathcal{Q}_{n+1} \left(\begin{array}{c|c} & \\ \hline & \end{array} \right) & \downarrow \mathcal{Q}_n \\
 \tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^{n+1}} & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{H}^{p^{n+1}} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^n} & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{H}^{p^n} \\
 \downarrow & & \\
 K & &
 \end{array}$$

on en déduit l'isomorphisme annoncé. \square

Corollaire 2.2.4. *Soit $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que $\tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^{n_0}}/\tilde{K} \cap \mathcal{H}^p$ soit ramifiée en toutes les places au dessus de p et tel que $Y_{n_0} \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{r_2+1}$. Alors pour tout entier $n \geq n_0$, les facteurs invariants de $\text{Gal}(\tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^{n+1}}/K)$ sont égaux aux facteurs invariants de $\text{Gal}(\tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^n}/K)$ multipliés par p .*

Démonstration. En effet, on considère une \mathbb{Z}_p -base (e_1, \dots, e_r) de $\text{Gal}(\tilde{K}/K)$ adaptée au sous- \mathbb{Z}_p -module $\text{Gal}(\tilde{K}/\tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^n})$. Il existe alors $p^{a_1}, \dots, p^{a_{r_2+1}}$ tels que $(p^{a_i}e_i)$ soit une \mathbb{Z}_p -base de $\text{Gal}(\tilde{K}/\tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^n})$. Les p^{a_i} sont alors exactement les facteurs invariants de $\text{Gal}(\tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^n}/K)$. Or $\text{Gal}(\tilde{K}/\tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^{n+1}}) = p\text{Gal}(\tilde{K}/\tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^n})$, on en déduit donc que $(p^{a_i+1}e_i)$ est une \mathbb{Z}_p -base de $\text{Gal}(\tilde{K}/\tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^{n+1}})$ et donc que les facteurs invariants de $\text{Gal}(\tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^{n+1}}/K)$ sont exactement les p^{a_i+1} . \square

Or, puisque que $\mathfrak{X} \simeq \mathbb{Z}_p^{r_2+1} \times \mathcal{T}_p$, le groupe de classe de rayon p^n , $\text{Gal}(\mathcal{H}^{p^n}/K)$, est isomorphe au produit direct des deux p -groupes $\text{Gal}(\tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^n}/K)$ et de $\text{Gal}(\mathcal{H}^{p^n}/\tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^n})$. Les facteurs invariants de $\text{Gal}(\mathcal{H}^{p^n}/K)$ s'obtiennent donc en concaténant les facteurs invariants des deux groupes composant ce produit direct.

On est maintenant en mesure d'énoncer le résultat permettant de déterminer explicitement la structure du p -groupe \mathcal{T}_p :

Théorème 2.2.5. *Soit n tel que $Y_n = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{r_2+1}$ et $\tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^n}/\tilde{K} \cap \mathcal{H}^p$ soit ramifiée en toutes les places au-dessus de p . On suppose d'une part que*

$$\mathcal{FI}(Cl_{p^n}(K)) = [b_1, \dots, b_t, a_1, \dots, a_{r_2+1}]$$

avec $(v_p(b_t)) < (v_p(a_1))$, et d'autre part que :

$$\mathcal{FI}(Cl_{p^{n+1}}(K)) = [b_1, \dots, b_t, pa_1, \dots, pa_{r_2+1}].$$

Alors, on a :

$$\mathcal{FI}(\mathcal{T}_p) = [b_1, \dots, b_t].$$

Démonstration. En effet, du fait que

$$\ker(Cl_{p^{n+1}}(K) \rightarrow Cl_{p^n}(K)) \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{r_2+1},$$

on a $Cl_{p^i}(K) \simeq \text{tor}_{\mathbb{Z}_p}(\mathfrak{X}) \times \text{Gal}(\tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^i}/K)$ pour $i \in \{n, n+1\}$. Or on a vu que les facteurs invariants de $\text{Gal}(\tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^{n+1}}/K)$ sont exactement égaux à p fois ceux de $\text{Gal}(\tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^n}/K)$. Par conséquent, si a est un facteur invariant de $\text{Gal}(\tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^{n+1}}/K)$, on a nécessairement $a = pa_i$ ou $a = pb_i$.

Or comme $(v_p(a_1)) > (v_p(b_t))$, aucun des facteurs invariants de $\text{Gal}(\tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^{n+1}}/K)$ n'est de la forme pb_i . Les facteurs invariants de $\text{Gal}(\tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^{n+1}}/K)$ sont donc exactement les pa_1, \dots, pa_{r_2+1} . Le résultat découle alors du fait que $Cl_{p^{n+1}}(K)$ est isomorphe au produit direct de \mathcal{T}_p et de $\text{Gal}(\tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^{n+1}}/K)$. \square

Remarque. Pour pouvoir faire des calculs, il faut que l'on puisse contrôler à partir de quelle étape toutes les places au-dessus de p dans K se ramifient dans l'extension $\tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^n}/\tilde{K} \cap \mathcal{H}^p$.

2.3 Une borne explicite

2.3.1 Le cas quadratique et $p \neq 2$.

Pour $p \neq 2$, on considère le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} \tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^2} & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{H}^{p^2} \\ \downarrow & & \swarrow \\ K_1 & & \\ \downarrow & & \\ \tilde{K} \cap \mathcal{H}^p & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{H}^p \\ \downarrow & & \\ K & & \end{array}$$

où K_1 est le premier étage de la \mathbb{Z}_p -extension de K .

Les places au-dessus de p sont totalement ramifiées dans $K_1/K(\mu_p)$ donc $\tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^2}/\tilde{K} \cap \mathcal{H}^p$ est ramifiée en toutes les places au dessus de p donc on commence les calculs pour savoir quand $Cl_{p^n}(K)$ est stable à partir de $n = 2$

Exemple 2.3.1. Pour le corps $\mathbb{Q}(\sqrt{-129})$, on a $Cl_{p^2}(K) = [18, 3, 3]$, $Cl_{p^3}(K) = [27, 9, 3]$ et $Cl_{p^4}(K) = [81, 18, 3]$. On en déduit donc que la \mathbb{Z}_p -torsion de \mathfrak{X} est exactement $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

2.3.2 Le cas général.

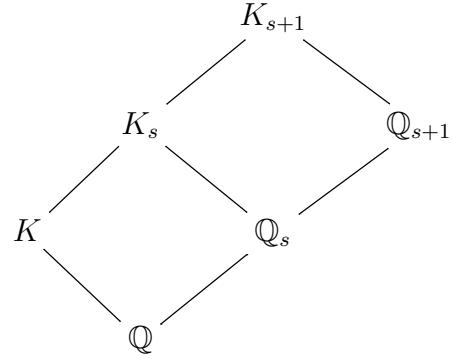
Plus généralement si on note $e = \max_{v|p} \{e_v\}$ l'indice de ramification de K/\mathbb{Q} et s sa valuation p -adique, alors on commence à calculer si $Cl_{p^n}(K)$ se stabilise à partir du rang $n = 2 + s$. En effet si l'on considère le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 & \tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^{s+2}} & \xrightarrow{\hspace{2cm}} \mathcal{H}^{p^{s+2}} \\
 K_{s+1} \swarrow & \downarrow & \searrow \\
 & \tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^{s+1}} & \xrightarrow{\hspace{1cm}} \mathcal{H}^{p^{s+1}} \\
 & \searrow & \downarrow \\
 & K &
 \end{array}$$

où K_j est le j^{ieme} étage de la \mathbb{Z}_p -extension de K .

Les places au dessus de p sont totalement ramifiées dans K_{s+1}/K_s donc $\tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^s}/\tilde{K} \cap \mathcal{H}^p$ est ramifiée en toutes les places au dessus de p . On commence alors le calcul pour savoir quand $Cl_{p^n}(K)$ est stable à partir de $n = s + 2$. On va maintenant justifier le fait que toutes les places au dessus de p sont totalement ramifiées dans K_{s+1}/K_s .

On considère le diagramme suivant :



Le degré de ramification en p de $\mathbb{Q}_{s+1}/\mathbb{Q}$ est p^{s+1} tandis que celui de K/\mathbb{Q} est $p^s a$ avec a et p premiers entre eux. Donc l'extension K_{s+1}/K est ramifiée et K_{s+1}/K_s est totalement ramifiée en toutes les places divisant p .

Corollaire 2.3.2. *Soit e l'indice de ramification de p dans K/\mathbb{Q} et s la valuation p -adique de e . Soit $n \geq 2 + s$, on suppose d'une part que*

$$\mathcal{FI}(Cl_{p^n}(K)) = [b_1, \dots, a_t, a_1, \dots, a_{r_2+1}]$$

avec $v_p(b_t) < v_p(a_1)$, et d'autre part que :

$$\mathcal{FI}(Cl_{p^{n+1}}(K)) = [b_1, \dots, b_t, p a_1, \dots, p a_{r_2+1}].$$

Alors, on a :

$$\mathcal{FI}(\mathcal{T}_p) = [b_1, \dots, b_t].$$

Chapitre 3

Approche heuristique

On est maintenant en mesure de calculer \mathcal{T}_p . L'idée de ce chapitre est d'essayer de donner une explication heuristique des résultats numériques que l'on obtient. Bien évidemment, la principale référence sur le sujet est [CL84], on a aussi utilisé[Del07].

L'idée principale des heuristiques de Cohen-Lenstra peut se vulgariser de la façon suivante : “plus un groupe G possède un gros groupe d'automorphismes, moins il apparaît dans la nature”. On commence par rappeler les principaux résultats que l'on utilisera.

3.1 Rappels sur les heuristiques de Cohen-Lenstra

Nous rappelons dans cette section les principaux résultats relatifs aux heuristiques de Cohen-Lenstra, que nous utiliserons par la suite. Pour de plus amples informations sur ces résultats, il convient de consulter [CL84]. La \mathbb{Z}_p -torsion de \mathfrak{X} est le groupe de Galois d'une certaine extension de K . Si l'on suppose l'extension K/\mathbb{Q} galoisienne, le module \mathcal{T}_p est alors muni d'une structure de $\mathbb{Z}[\Delta]$ -module, où $\Delta := \text{Gal}(K/\mathbb{Q})$.

Cependant, si l'on note $N_\Delta = \sum_{\sigma \in \Delta} \sigma$, on a $N_\Delta(\mathcal{T}_p) = 1$, par conséquent \mathcal{T}_p est en fait un $\mathbb{Z}_p[\Delta]/(N_\Delta)$ -module.

Dans le cas où le groupe Δ est cyclique d'ordre premier l , $\mathbb{Z}_p[\Delta]/(1 + \sigma + \dots + \sigma^{o(\Delta)-1})$ est isomorphe à l'anneau des entiers de $\mathbb{Q}(\zeta_l)$, que l'on notera O_l .

Dans cette section, on suppose donc que K est une extension cyclique de degré premier l de \mathbb{Q} . La \mathbb{Z}_p -torsion de \mathfrak{X} est alors naturellement munie d'une structure de O_l -module.

Dans ce qui suit, on prend O_F l'anneau des entiers d'un corps de nombres et G un O_l -module. Comme O_K il peut s'écrire de façon non canonique sous

la forme $\bigoplus_{i=1}^q O_K/\mathfrak{a}_i$, où les \mathfrak{a}_i sont des idéaux de O_K . Cependant l'idéal de

Fitting $\mathfrak{a} = \prod_{i=1}^q \mathfrak{a}_i$ ne dépend lui que de la classe d'isomorphie de G , considéré

comme O_K -module. Cet invariant, noté $\mathfrak{a}(G)$, peut être considéré comme une généralisation de la notion de cardinal. On a d'ailleurs $N_{\mathbb{Q}(\zeta_l)/\mathbb{Q}}(\mathfrak{a}(G)) = \#G$.

On va maintenant définir la notion de cardinalité asymptotique pour un ensemble de O_K -module donné. Pour cela, on considère une fonction h , définie sur l'ensemble des classes d'isomorphismes de O_l -modules (typiquement h sera une fonction caractéristique).

Définition 3.1.1. La moyenne de h est si elle existe la limite lorsque $N \rightarrow \infty$ du quotient

$$\frac{\sum_{G, N(\mathfrak{a}(G)) \leq N} \frac{h(G)}{\#\text{Aut}_{O_F}(G)}}{\sum_{G, N(\mathfrak{a}(G)) \leq N} \frac{1}{\#\text{Aut}_{O_F}(G)}}.$$

Elle sera notée $M(h)$ ou encore $M_l(h)$ si l'anneau considéré est O_l .

Où $\sum_{G, N(\mathfrak{a}(G)) \leq N}$, la somme portant sur les classes d'isomorphie de G .

Dans le cas où h est la fonction caractéristique d'une certaine propriété, on considère l'ensemble des classes d'isomorphie des groupes de cardinal inférieur ou égal à N , le quotient de la définition précédente peut être considéré comme le rapport du cardinal de l'ensemble des groupes vérifiant la propriété h sur le cardinal de l'ensemble total des groupes considérés initialement, chaque classe d'isomorphie étant compté avec la pondération $\frac{1}{\#\text{Aut}_{O_K}(G)}$.

Suivant [CL84], on introduit la notation suivante :

Notation : Étant donné un idéal \mathfrak{a} de O_K , on note

$$w(\mathfrak{a}) = \sum_{G, \mathfrak{a}(G) = \mathfrak{a}} \frac{1}{\# \text{Aut}_{O_K}(G)}$$

Dans [CL84], Cohen et Lenstra donnent une relation permettant de calculer effectivement $w(\mathfrak{a})$:

Proposition 3.1.2. [CL84] p.40 corollaire 3.8 Soit $n \in \mathbb{N}$, alors :

$$w(\mathfrak{a}) = \frac{1}{N_{\mathbb{Q}(\zeta_l)}(\mathfrak{a})} \left(\prod_{\mathfrak{p}^\alpha \parallel \mathfrak{a}} \prod_{k=1}^{\alpha} \left(1 - \frac{1}{N_{O_l}(\mathfrak{p})^k}\right) \right)^{-1}.$$

La notation $\mathfrak{p}^\alpha \parallel \mathfrak{a}$ signifiant que $\mathfrak{p}^\alpha \mid \mathfrak{a}$ et que $\mathfrak{p}^{\alpha+1} \nmid \mathfrak{a}$.

Par conséquent la fonction w , définie sur l'ensemble des idéaux de O_K , est multiplicative.

Notation : On note Π_p la fonction caractéristique de l'ensemble des classes d'isomorphismes de groupe, dont la p -partie est non-triviale.

Proposition 3.1.3. [CL84] p. 47 exemple 5.10 On note $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_g$ les p -places de O_l , la moyenne de Π_p existe et on a :

$$M_l(\Pi_p) = 1 - \prod_{i=1}^g \prod_{k \geq 1} \left(1 - \frac{1}{p^{kf_i}}\right),$$

où les f_i désignent les degrés des extensions résiduelles O_l/\mathfrak{p}_i sur \mathbb{F}_p .

Démonstration.

$$\sum_{G, N(\mathfrak{a}(G)) \leq N} \frac{\Pi_p(G)}{\# \text{Aut}_{O_F}(G)} = \sum_{G, N(\mathfrak{a}(G)) \leq N} \frac{1}{\# \text{Aut}_{O_F}(G)} - \sum_{G, N(\mathfrak{a}(G)) \leq N \text{ et } p \nmid \#G} \frac{1}{\# \text{Aut}_{O_F}(G)}$$

Ainsi

$$\frac{\sum_{G, N(\mathfrak{a}(G)) \leq N} \frac{\Pi_p(G)}{\# \text{Aut}_{O_F}(G)}}{\sum_{G, N(\mathfrak{a}(G)) \leq N} \frac{1}{\# \text{Aut}_{O_F}(G)}} = 1 - \frac{\sum_{G, N(\mathfrak{a}(G)) \leq N \text{ et } p \nmid \#G} \frac{1}{\# \text{Aut}_{O_F}(G)}}{\sum_{G, N(\mathfrak{a}(G)) \leq N} \frac{1}{\# \text{Aut}_{O_F}(G)}}.$$

Nous allons utiliser la multiplicativité de $w(a)$ pour démontrer la convergence de ce quotient. On observe tout d'abord que :

$$\sum_{G, N(\mathfrak{a}(G)) \leq N} \frac{1}{\# \text{Aut}_{O_F}(G)} = \sum_{a, N(\mathfrak{a}) \leq N} w(a)$$

Pour simplifier la lecture on note

$$Q_N = \frac{\sum_{\substack{a, N(\mathfrak{a}) \leq N \text{ et } p \nmid a}} w(a)}{\sum_{a, N(\mathfrak{a}) \leq N} w(a)}$$

Par multiplicativité de w , on a :

$$\sum_{a, N(\mathfrak{a}) \leq N} w(a) \leq \sum_{a, N(\mathfrak{a}) \leq N \text{ et } p \nmid a} w(a) \sum_{\mathfrak{p}, N(\mathfrak{p}) \leq N} w(\mathfrak{p})$$

Pour $\epsilon > 0$ donné on a :

$$\begin{aligned} Q_N &= \frac{\sum_{\substack{a, N(\mathfrak{a}) \leq N \text{ et } p \nmid a}} w(a)}{\sum_{a, N(\mathfrak{a}) \leq N} w(a)} \\ &= \frac{\sum_{\substack{a, N(\mathfrak{a}) \leq N \text{ et } p \nmid a}} w(a) \sum_{\mathfrak{p}, N(\mathfrak{p}) \leq N^\epsilon} w(\mathfrak{p})}{\sum_{a, N(\mathfrak{a}) \leq N} w(a) \sum_{\mathfrak{p}, N(\mathfrak{p}) \leq N^\epsilon} w(\mathfrak{p})} \end{aligned}$$

D'après le lemme 5.3 page 44 de [CL84] $\sum_{a, N(\mathfrak{a}) \leq x} w(a) \simeq C_\infty \log(x)$ (où $C_\infty =$

$\kappa \prod_{s \geq 2} \zeta_{\mathbb{Q}(\zeta_l)}(s)$ et κ le résidu en 1 de la fonction $\zeta_{\mathbb{Q}(\zeta_l)}$). Donc

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{\substack{a, N(\mathfrak{a}) \leq N^{1+\epsilon}}} w(a)}{\sum_{a, N(\mathfrak{a}) \leq N} w(a)} = 1 + \epsilon$$

Il nous reste à calculer la limite $\sum_{\mathfrak{p}, N(\mathfrak{p}) \leq N} w(\mathfrak{p})$ quand N tend vers $+\infty$.

On note $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_g$ les places au dessus de p dans K . D'après la proposition 3.1.2 on a :

$$w(\mathfrak{p}_i^k) = \frac{1}{p^{f_i k}} \left(\prod_{a=1}^k \left(1 - \frac{1}{p^{f_i a}}\right) \right)$$

Par multiplicité de w , on a $\sum_{\mathfrak{p}, N(\mathfrak{p}) \leq N} w(p) \leq \prod_{i=1}^g \sum_{k \geq 0} w(\mathfrak{p}_i^k)$, maintenant en posant $N_i = E \left[\frac{\log(N)}{g f_i \log(p)} \right]$ on a $N(\mathfrak{p}_i^k) \leq N^{\frac{1}{g}} \Leftrightarrow k \leq N_i$ et donc

$$\prod_{i=1}^g \sum_{k=0}^{N_i} w(\mathfrak{p}_i^k) \leq \sum_{\mathfrak{p}, N(\mathfrak{p}) \leq N} w(p) \leq \prod_{i=1}^g \sum_{k \geq 0} w(\mathfrak{p}_i^k)$$

Or quand N tend vers $+\infty$ il en est de même pour N_i donc

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{\mathfrak{p}, N(\mathfrak{p}) \leq N} w(p) = \prod_{i=1}^g \sum_{k \geq 0} w(\mathfrak{p}_i^k)$$

or d'après l'identité d'Euler citée dans [Hal38] on a :

$$\sum_{k \geq 0} w(\mathfrak{p}_i^k) = \frac{1}{\prod_{k \geq 1} \left(1 - \frac{1}{p^k f_i}\right)}.$$

Ainsi Q_N converge vers $\prod_{i=1}^g \prod_{k \geq 1} \left(1 - \frac{1}{p^k f_i}\right)$, et donc

$$M_l(\Pi_p) = 1 - \prod_{i=1}^g \prod_{k \geq 1} \left(1 - \frac{1}{p^k f_i}\right)$$

□

Corollaire 3.1.4. *Dans le cas où l'extension K est galoisienne, tous les degrés résiduels sont égaux à f et dans ce cas*

$$M_l(\Pi_p) = 1 - \left(\prod_{k \geq 1} 1 - \frac{1}{p^{kf}} \right)^g.$$

Remarque. Le réel $M_l(\Pi_p)$ est appelé 0-moyenne. Cette notion peut être généralisée par la notion de u -moyenne. L'expression de la u -moyenne est obtenue en remplaçant k par $k + u$ dans l'expression de la proposition 3.1.3

$$M_{l,u}(\Pi_p) = 1 - \prod_{i=1}^g \prod_{k \geq 1} \left(1 - \frac{1}{p^{(k+u)f_i}} \right),$$

Soit \mathcal{K} un ensemble de nombres, cyclique de degré 1. Soit $K \in \mathcal{K}$ et G la p -partie de son groupe de classe. On suppose que $l \neq p$, alors G est $(\mathbb{Z}[\Delta]/\sum_{\sigma \in \Delta} \sigma)$ -module donc un O_l -modules. Pour h une fonction définie sur G , on peut définir

$$M(h) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sum_{K \in \mathcal{K}, |disc(K)| \leq x} h(G)}{\sum_{K \in \mathcal{K}, |disc(K)| \leq x} 1}.$$

Dans [CL84] Cohen et Lenstra conjecture :

Conjecture 2. *Pour une fonction "raisonnable" h on a :*

1. (cas quadratique imaginaire) Si $r_1 = 0$ et $r_2 = 1$ alors $M(h)$ est une 0-moyenne.
2. (cas quadratique réel) Si $r_1 = 2$ et $r_2 = 0$ alors $M(h)$ est une 1-moyenne. (ici $l=2$ et $O_l = \mathbb{Z}$)

Remarque. On prendra comme fonction la caractéristique d'une classe d'isomorphisme d'un groupe, par exemple Π_p .

3.1.1 Calcul explicite des moyennes.

Les heuristiques de Cohen-Lenstra conjecturent que la proportion de groupe de classe non-trivial est une 0 et 1-moyennes. On s'intéresse plus en détail au calcul de ces deux moyenne. Puis l'on comparera ces moyennes à la proportion de torsion de \mathfrak{X} non triviale. Ici on s'intéresse aux corps quadratiques $l = 2$ et $f = g = 1$. Donc on obtient :

$$M_{2,u}(\Pi_p) = 1 - \prod_{k \geq 1} \left(1 - \frac{1}{p^{(k+u)}} \right),$$

En prenant $u = 0$, on obtient la 0-moyenne :

$$M_{2,0}(\Pi_p) = 1 - \prod_{k \geq 1} \left(1 - \frac{1}{p^k}\right),$$

De même pour $u = 1$, on a :

$$M_{2,1}(\Pi_p) = 1 - \prod_{k \geq 1} \left(1 - \frac{1}{p^{(k+1)}}\right),$$

Par un calcul rapide on obtient que

$$M_{2,1} = 1 + (M_{2,0} - 1) \frac{p}{p - 1}.$$

Si maintenant au lieu de prendre la fonction Π_p , On prend Π_G fonction caractéristique de la classe d'isomorphisme du p -groupe G . Pour obtenir la u -moyenne de la fonction Π_G on multiplie $M_{2,u}$ par $\frac{1}{\#(Aut_{O_l}(G))}$. Pour le calcul $\#(Aut_{O_l}(G))$ on peut regarder [Hal38]. On commence par rappeler quelques notations utilisées dans [Hal38]. On prend G un p -groupe abélien d'ordre p^n . On peut alors l'écrire comme un produit de groupe cyclique $(1^{\lambda_1}, 2^{\lambda_2}, 3^{\lambda_3}, \dots)$, λ_1 est le nombre de groupe d'ordre p dans les produits, λ_2 le nombre de groupe d'ordre p^2 , et ainsi de suite. On a,

$$n = \lambda_1 + 2\lambda_2 + \dots$$

On définit alors

$$\mu_i = \sum_{j \geq i} \lambda_j$$

on a donc $\lambda_i = \mu_i - \mu_{i+1}$

on pose maintenant $f_k(x) = (1 - x)(1 - x^2)\dots(1 - x^k)$, et $f_0(x) = 1$

Théorème 3.1.5. [Hal38] p.127 Si G est un p -groupe abélien alors l'ordre de son groupe d'automorphisme vaut :

$$\#(Aut(G)) = \frac{f_{\lambda_1}(\frac{1}{p}) f_{\lambda_2}(\frac{1}{p}) f_{\lambda_3}(\frac{1}{p}) \dots}{(\frac{1}{p})^{\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2 + \dots}}$$

Regardons sur un exemple comment on calcule l'ordre du groupe d'automorphisme.

Exemple 3.1.6. Prenons $G = (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})$, alors $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$, $\mu_1 = 3$ et $\mu_2 = 1$.

Donc

$$\begin{aligned}\#(Aut(G)) &= \frac{f_2(\frac{1}{3})f_1(\frac{1}{3})}{(\frac{1}{p})^{3^2+1}} \\ &= \frac{(1-\frac{1}{3})^2(1-(\frac{1}{3})^2)}{(\frac{1}{4})^{10}} \\ &= 3^6(3-1)^2(3^2-1) \\ &= 23328.\end{aligned}$$

Maintenant on peut comparer ces moyennes aux résultats numériques que l'on obtient.

3.2 Comparaison avec les résultats numériques.

On a observé que dans le cas des corps totalement réels la proportion de corps dont la torsion de \mathfrak{X} est non triviale était une 0-moyenne Dans les tableaux que l'on donne dans la suite le 0,00000 signifie que l'on n'a pas rencontré de corps dans ce cas. Pour les cas où les corps étaient peu présents, on a ajouté des chiffres significatifs pour obtenir après avoir arrondi un nombre non nul.

3.2.1 Résultats numériques.

Cas des corps quadratiques réels.

Dans ce cas $O_l = \mathbb{Z}$ et $l = 2$. On observe que dans le cas quadratique réel la proportion de corps dont la \mathbb{Z}_p -torsion est non triviale est une 0-moyenne et une 1-moyenne pour les corps quadratiques imaginaires. Nous expliquerons en quoi ce phénomène est en accord avec les heuristiques de Cohen-Lenstra dans la section 3.3.

Principe du calcul : Étant donné un entier N , on considère tous les corps quadratiques du type $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ avec d entier naturel sans facteur carré et $d \leq N$. On obtient ainsi un ensemble \mathcal{K}_N de corps quadratiques. Ensuite, on calcule la proportion de corps appartenant à \mathcal{K}_N , pour lesquels la \mathbb{Z}_p -torsion de \mathfrak{X} est non triviale. Cette proportion est notée f_{exp} . On note Π_p la fonction

caractéristique de \mathcal{T}_p . L'écart $|f_{exp} - M_{2,0}(\Pi_p)|$ entre f_{exp} et $M_{2,0}(\Pi_p)$ est noté δ . On donne ci-dessous, les tables comportant les résultats obtenus pour $N = 10^6$, $N = 10^7$, $N = 10^8$ et $N = 10^9$.

On note que si l'on considère comme ensemble \mathcal{K}_N l'ensemble des corps du type $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, dont le discriminant est inférieur ou égal à N , on obtient des résultats en tous points similaires.

$$N = 10^6$$

p	$M_{2,0}(\Pi_p)$	f_{exp}	δ (Écart)
3	0,43987	0,48094	0,04107
5	0,23967	0,23209	0,00758
7	0,16320	0,15964	0,00356
11	0,09916	0,09597	0,00319
13	0,08284	0,08104	0,00180
17	0,06228	0,06055	0,00173
19	0,05540	0,05400	0,00140
23	0,04537	0,04445	0,39913
29	0,03375	0,03494	0,00119
31	0,03330	0,03257	0,00073
37	0,02776	0,02718	0,00058
41	0,02499	0,02469	0,00030
43	0,02380	0,02333	0,00047
47	0,02173	0,02140	0,00033

$$N = 10^7$$

p	$M_{2,0}(\Pi_p)$	f_{exp}	$\delta(\text{Écart})$
3	0,43987	0,49054	0,05067
5	0,23967	0,23606	0,00361
7	0,16320	0,16134	0,00186
11	0,09916	0,09802	0,00114
13	0,08284	0,08195	0,00089
17	0,06228	0,06164	0,00064
19	0,05540	0,05472	0,00068
23	0,04537	0,04445	0,00092
29	0,03375	0,03529	0,00154
31	0,03330	0,03290	0,00040
37	0,02776	0,02746	0,00030
41	0,02499	0,02479	0,00020
43	0,02380	0,02348	0,00032
47	0,02173	0,02160	0,00013

$$N = 10^8$$

p	$M_{2,0}(\Pi_p)$	f_{exp}	$\delta(\text{Écart})$
3	0,43987	0,49697	0,05710
5	0,23967	0,23763	0,00204
7	0,16320	0,16234	0,00086
11	0,09916	0,09858	0,00058
13	0,08284	0,08242	0,00042
17	0,06228	0,06197	0,00031
19	0,05540	0,05517	0,00023
23	0,04537	0,04512	0,00025
29	0,03375	0,03552	0,00177
31	0,03330	0,03315	0,00015
37	0,02776	0,02761	0,00015
41	0,02499	0,02487	0,00012
43	0,02380	0,02367	0,00013
47	0,02173	0,02164	0,00009

$$N = 10^9$$

p	$M_{2,0}(\Pi_p)$	f_{exp}	$\delta(\text{Écart})$
3	0,43987	0,50120	0,06133
5	0,23967	0,23854	0,00113
7	0,16320	0,16280	0,00040
11	0,09916	0,09893	0,00023
13	0,08284	0,08266	0,00018
17	0,06228	0,06214	0,00141
19	0,05540	0,05526	0,00004
23	0,04537	0,04527	0,00010
29	0,03375	0,03560	0,00185
31	0,03330	0,03323	0,00007
37	0,02776	0,02770	0,00006
41	0,02499	0,02493	0,00006
43	0,02380	0,02376	0,00004
47	0,02173	0,02168	0,00005

On va maintenant voir la répartition de la torsion en fonction des invariants. On commence par donner une table des fréquences théoriques, puis les fréquences expérimentales pour $N = 10^6$, $N = 10^7$, $N = 10^8$ et $N = 10^9$.

Fréquence théorique

p	invariants	(p)	(p, p)	(p^2)	(p, p, p)	(p^2, p)
2		0,28882	0,048137	0,14441	0,00258	0,01203
3		0,28006	0,01167	0,09335	0,00007	0,00259
5		0,19008	0,00158	0,03802	0,0000006	0,00025
7		0,13947	0,00042	0,01992	0,00000003	0,00005
11		0,09008	0,00007	0,00819	0,0000000005	0,000006
13		0,07643	0,00004	0,00588	0,0000000001	0,000002
17		0,05861	0,00001	0,00345	0,00000000009	0,0000007
19		0,05248	0,000008	0,00276	0,00000000003	0,0000004
23		0,04339	0,000004	0,00189	0,000000000006	0,00000015
29		0,03444	0,000001	0,00119	0,0000000000007	0,00000005
31		0,03222	0,000001	0,00104	0,0000000000004	0,00000003
37		0,02701	0,000005	0,00073	0,00000000000008	0,00000001
41		0,02438	0,000004	0,00059	0,00000000000003	0,000000008
43		0,02324	0,000003	0,00054	0,00000000000002	0,000000007
47		0,02127	0,000002	0,00045	0,000000000000009	0,000000004

Fréquence expérimentale

$$N = 10^6$$

3.2. COMPARAISON AVEC LES RÉSULTATS NUMÉRIQUES. 53

$p \backslash$ invariants	(p)	(p, p)	(p^2)	(p, p, p)	(p^2, p)	(p^3)
3	0,30587	0,01564	0,10058	0,00004	0,00642	0,03295
5	0,18543	0,00121	0,03634	0,00000	0,00028	0,00711
7	0,13706	0,00031	0,01909	0,00000	0,00005	0,00265
11	0,08717	0,00006	0,00800	0,00000	0,00001	0,00065
13	0,07500	0,00003	0,00558	0,00000	0,00000	0,00039
17	0,05706	0,00001	0,00329	0,00000	0,00000	0,00019
19	0,05124	0,000003	0,00262	0,00000	0,00000	0,00013
23	0,04256	0,00000	0,00181	0,00000	0,00000	0,00008
29	0,03375	0,00000	0,00115	0,00000	0,00000	0,00003
31	0,03158	0,00000	0,00094	0,00000	0,00000	0,00005
37	0,02639	0,00000	0,00077	0,00000	0,00000	0,00002
41	0,02408	0,00000	0,00059	0,00000	0,00000	0,00001
43	0,02280	0,00000	0,00053	0,00000	0,00000	0,00001
47	0,02098	0,00000	0,00040	0,00000	0,00000	0,00001

$$N = 10^7$$

$p \backslash$ invariants	(p)	(p, p)	(p ²)	(p, p, p)	(p ² , p)	(p ³)
3	0,30894	0,01740	0,10197	0,00007	0,00754	0,03374
5	0,18791	0,00142	0,03716	0,0000003	0,00033	0,00734
7	0,13813	0,00038	0,01957	0,00000	0,00005	0,00274
11	0,08912	0,00006	0,00803	0,00000	0,00005	0,00073
13	0,07565	0,00003	0,00578	0,00000	0,000001	0,00045
17	0,05802	0,00001	0,00339	0,00000	0,0000008	0,00021
19	0,05184	0,000006	0,00273	0,00000	0,0000002	0,00013
23	0,04256	0,000002	0,00186	0,00000	0,00000	0,00008
29	0,30894	0,01740	0,00116	0,00000	0,00000	0,03374
31	0,18791	0,00142	0,00101	0,00000	0,00000	0,00734
37	0,03409	0,00000	0,00072	0,00000	0,00000	0,00004
41	0,03185	0,00000	0,00058	0,00000	0,00000	0,00003
43	0,02672	0,00000	0,00053	0,00000	0,00000	0,00002
47	0,02419	0,00000	0,00043	0,00000	0,00000	0,00001

$$N = 10^8$$

$p \backslash$ invariants	(p)	(p, p)	(p^2)	(p, p, p)	(p^2, p)	(p^3)
3	0,31092	0,01882	0,10304	0,00011	0,00824	0,03426
5	0,18875	0,00150	0,03757	0,0000003	0,00036	0,00749
7	0,13884	0,00039	0,01974	0,0000002	0,00006	0,00283
11	0,08957	0,00007	0,00812	0,00000	0,000006	0,00074
13	0,07606	0,00003	0,00584	0,00000	0,000002	0,00045
17	0,05830	0,00001	0,00344	0,00000	0,000009	0,00020
19	0,05227	0,000007	0,00274	0,00000	0,000003	0,00014
23	0,04315	0,000003	0,00187	0,00000	0,000001	0,00008
29	0,03430	0,000001	0,00117	0,00000	0,0000002	0,00004
31	0,03209	0,000001	0,00103	0,00000	0,0000003	0,00003
37	0,02686	0,0000004	0,00073	0,00000	0,0000003	0,00002
41	0,02426	0,0000003	0,00059	0,00000	0,0000002	0,00001
43	0,02426	0,0000002	0,00053	0,00000	0,00000	0,00001
47	0,02313	0,0000002	0,00045	0,00000	0,00000	0,00001

$$N = 10^9$$

$p \backslash$ invariants	(p)	(p, p)	(p^2)	(p, p, p)	(p^2, p)	(p^3)
3	0,31224	0,01977	0,10374	0,00013	0,00873	0,03452
5	0,18932	0,00154	0,03779	0,000005	0,00037	0,00755
7	0,13918	0,00041	0,01984	0,0000003	0,00007	0,00283
11	0,08989	0,00007	0,00815	0,00000	0,00001	0,00074
13	0,07628	0,00003	0,00586	0,00000	0,000003	0,00045
17	0,05848	0,00001	0,00343	0,00000	0,000007	0,00020
19	0,05235	0,000007	0,00275	0,00000	0,000004	0,00014
23	0,04331	0,000003	0,00188	0,00000	0,0000002	0,00008
29	0,03437	0,00000	0,00119	0,00000	0,0000004	0,00004
31	0,03215	0,00000	0,00104	0,00000	0,0000004	0,00003
37	0,02695	0,0000005	0,00073	0,00000	0,0000002	0,00002
41	0,02433	0,0000003	0,00059	0,00000	0,0000001	0,00001
43	0,02433	0,0000003	0,00054	0,00000	0,0000001	0,00001
47	0,02321	0,0000002	0,00045	0,00000	0,00000003	0,00001

Cas quadratique imaginaire

Principe de calcul. Même principe que pour les corps quadratiques réels : on remplace $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ par $\mathbb{Q}\sqrt{-d}$.

$$N = 10^6$$

p	$M_{2,1}(\Pi_p)$	f_{exp}	δ
2	0.42235	0,90115	1.21734
3	0.15981	0,23983	0.50073
5	0,04958	0,04585	0.00989
7	0,02374	0,02309	0,00374
11	0,00908	0,00855	0,00416
13	0,00641	0,00609	0,00360
17	0,00368	0,00343	0,00445
19	0,00292	0,00267	0,0589
23	0,00198	0,00175	0,00510
29	0,00123	0,00107	0,00916
31	0,00108	0,00089	0,00929
37	0,00075	0,00064	0,00813
41	0,00061	0,00052	0,00982
43	0,00055	0,00048	0,00998
47	0,00046	0,00035	0,01626

$$N = 10^7$$

3.2. COMPARAISON AVEC LES RÉSULTATS NUMÉRIQUES. 57

p	$M_2(\Pi_p)$	f_{exp}	δ
2	0,42235	0,91677	1.17062
3	0,15981	0,24810	0,55244
5	0,04958	0,04788	0,03439
7	0,02374	0,02347	0,01130
11	0,00908	0,00880	0,03103
13	0,00641	0,00623	0,02721
17	0,00368	0,0356	0,03239
19	0,00292	0,00282	0,03455
23	0,00198	0,00187	0,05281
29	0,00123	0,00118	0,04054
31	0,00108	0,00102	0,05364
37	0,00075	0,00071	0,04885
41	0,00061	0,00058	0,04339
43	0,00055	0,00053	0,04697
47	0,00046	0,00042	0,10130

$$N = 10^8$$

p	$M_2(\Pi_p)$	f_{exp}	δ
2	0,42235	0,92792	1,19703
3	0,15981	0,25351	0,58630
5	0,04958	0,04862	0,01940
7	0,02374	0,02358	0,00671
11	0,00908	0,00898	0,01103
13	0,00641	0,00634	0,01103
17	0,00368	0,00363	0,01157
19	0,00292	0,00288	0,01381
23	0,00198	0,00194	0,01722
29	0,00123	0,00121	0,01644
31	0,00108	0,00104	0,01817
37	0,00075	0,00073	0,02685
41	0,00061	0,00060	0,01627
43	0,00055	0,00054	0,02454
47	0,00046	0,00045	0,03522

$$N = 10^9$$

p	$M_2(\Pi_p)$	f_{exp}	δ
2	0,42235	0,93650	1.12734
3	0,15981	0,25718	0,60926
5	0,04958	0,04909	0,00989
7	0,02374	0,02365	0,00374
11	0,00908	0,00905	0,00416
13	0,00641	0,00638	0,00360
17	0,00368	0,00365	0,00445
19	0,00292	0,00291	0,00589
23	0,00198	0,00197	0,00510
29	0,00123	0,00122	0,00916
31	0,00108	0,00107	0,00929
37	0,00075	0,00074	0,00813
41	0,00061	0,00060	0,00982
43	0,00055	0,00055	0,00998
47	0,00046	0,00046	0,01626

De même que pour les corps quadriques réels, on va maintenant voir la répartition de la torsion en fonction des invariants. On commence par donner une table des fréquences théoriques, puis les fréquences expérimentales pour $N = 10^6$, $N = 10^7$, $N = 10^8$ et $N = 10^9$.

p	invariants	(p)	(p, p)	(p^2)	(p, p, p)	(p^2, p)	(p^3)
2		0,28882	0,02407	0,07221	0,00064	0,00301	0,01
3		0,14003	0,00194	0,01556	0,000004	0,00014	0,00
5		0,04752	0,00008	0,00190	$6 * 10^{-9}$	0,000003	0,00
7		0,02324	0,00001	0,00047	10^{-10}	$2 * 10^{-7}$	0,00
11		0,00901	0,0000006	0,00007	$4 * 10^{-13}$	$5 * 10^{-9}$	0,000
13		0,00637	0,0000002	0,00004	$5 * 10^{-14}$	10^{-9}	0,000
17		0,00366	0,00000004	0,00001	$2 * 10^{-15}$	10^{-10}	0,0000
19		0,00292	0,00000002	0,000008	$5 * 10^{-16}$	$6 * 10^{-11}$	0,0000
23		0,00197	0,000000007	0,000004	$5 * 10^{-17}$	10^{-11}	0,0000
29		0,00123	0,000000002	0,000001	$3 * 10^{-18}$	$2 * 10^{-12}$	0,0000
31		0,00107	0,000000001	0,000001	10^{-18}	10^{-12}	0,0000
37		0,00075	0,0000000004	0,0000005	$2 * 10^{-19}$	$3 * 10^{-13}$	0,00000
41		0,00061	0,0000000002	0,0000004	$5 * 10^{-20}$	10^{-13}	0,00000
43		0,00055	0,0000000002	0,0000003	$3 * 10^{-20}$	$9 * 10^{-14}$	0,00000
47		0,00046	0,0000000009	0,0000002	10^{-20}	$4 * 10^{-14}$	0,00000

$$N = 10^6$$

3.2. COMPARAISON AVEC LES RÉSULTATS NUMÉRIQUES.

61

$p \backslash$ invariants	(p)	(p, p)	(p^2)	(p, p, p)	(p^2, p)	(p^3)
2	0,31294	0,21185	0,10273	0,05494	0,10171	0,02198
3	0,21019	0,00373	0,02264	0,00000	0,00053	0,00245
5	0,04409	0,00006	0,00165	0,00000	0,00000	0,00005
7	0,02272	0,000005	0,00036	0,00000	0,00000	0,000003
11	0,00850	0,00000	0,00005	0,00000	0,00000	0,00000
13	0,00607	0,00000	0,00002	0,00000	0,00000	0,00000
17	0,00343	0,00000	0,000002	0,00000	0,00000	0,00000
19	0,00267	0,00000	0,000003	0,00000	0,00000	0,00000
23	0,00175	0,00000	0,000003	0,00000	0,00000	0,00000
29	0,00107	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
31	0,00089	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
37	0,00064	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
41	0,00052	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
43	0,00048	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
47	0,00035	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000

$$N = 10^7$$

$p \backslash$ invariants	(p)	(p, p)	(p^2)	(p, p, p)	(p^2, p)	(p^3)
2	0,28097	0,21935	0,09245	0,07301	0,10692	0,01963
3	0,21607	0,00493	0,02342	0,00000	0,00069	0,00260
5	0,04597	0,00007	0,00179	0,00000	0,00000	0,00006
7	0,02302	0,00001	0,00044	0,00000	0,00000	0,00001
11	0,00874	0,00000	0,00006	0,00000	0,00000	0,00000
13	0,00620	0,00000	0,00003	0,00000	0,00000	0,00000
17	0,00355	0,00000	0,00001	0,00000	0,00000	0,00000
19	0,00282	0,00000	0,000004	0,00000	0,00000	0,00000
23	0,00187	0,00000	0,000002	0,00000	0,00000	0,00000
29	0,00118	0,00000	0,0000002	0,00000	0,00000	0,00000
31	0,00102	0,00000	0,0000003	0,00000	0,00000	0,00000
37	0,00071	0,00000	0,0000002	0,00000	0,00000	0,00000
41	0,00058	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
43	0,00053	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
47	0,00042	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000

$$N = 10^8$$

$p \backslash$ invariants	(p)	(p, p)	(p ²)	(p, p, p)	(p ² , p)	(p ³)
2	0,25564	0,22157	0,08433	0,08768	0,10893	0,01770
3	0,21982	0,00573	0,02405	0,00001	0,00082	0,00265
5	0,04663	0,00007	0,00185	0,00000	0,000003	0,00007
7	0,02311	0,00001	0,00046	0,00000	0,00000005	0,00001
11	0,00892	0,0000006	0,00007	0,00000	0,00000	0,000000
13	0,00630	0,0000002	0,00003	0,00000	0,00000	0,000000
17	0,00362	0,00000002	0,00001	0,00000	0,00000	0,000000
19	0,00288	0,00000	0,000006	0,00000	0,00000	0,000000
23	0,00194	0,00000	0,000002	0,00000	0,00000	0,000000
29	0,00121	0,00000	0,0000009	0,00000	0,00000	0,000000
31	0,00104	0,00000	0,0000004	0,00000	0,00000	0,000000
37	0,00073	0,00000	0,0000003	0,00000	0,00000	0,000000
41	0,00060	0,00000	0,0000001	0,00000	0,00000	0,000000
43	0,00054	0,00000	0,0000002	0,00000	0,00000	0,000000
47	0,00045	0,00000	0,0000005	0,00000	0,00000	0,000000

$$N = 10^9$$

$p \backslash$ invariants	(p)	(p, p)	(p ²)	(p, p, p)	(p ² , p)	(p ³)
2	0,23467	0,22097	0,07751	0,09970	0,10909	0,01606
3	0,22236	0,00630	0,02444	0,00001	0,00091	0,00270
5	0,04706	0,00007	0,00188	0,000000005	0,000003	0,00007
7	0,02316	0,00001	0,00047	0,00000	0,0000002	0,00001
11	0,00897	0,0000006	0,00007	0,00000	0,000000007	0,0000005
13	0,00635	0,0000002	0,00004	0,00000	0,00000	0,0000001
17	0,00365	0,0000004	0,00001	0,00000	0,00000	0,00000001
19	0,00290	0,0000002	0,00007	0,00000	0,00000	0,00000
23	0,00196	0,00000007	0,00003	0,00000	0,00000	0,00000
29	0,00122	0,00000	0,00001	0,00000	0,00000	0,00000
31	0,00106	0,00000	0,000008	0,00000	0,00000	0,00000
37	0,00074	0,00000	0,000004	0,00000	0,00000	0,00000
41	0,00060	0,00000	0,000003	0,00000	0,00000	0,00000
43	0,00055	0,00000002	0,000002	0,00000	0,00000	0,00000
47	0,00045	0,00000	0,000001	0,00000	0,00000	0,00000

Cas des corps cubiques.

Dans ce cas $O_l = \mathbb{Z}[j]$ et $l = 3$.

Principe du premier calcul : Grâce au programme de Belabas [Bel97], on calcule les corps cubiques dont le discriminant est compris entre 0 et N . On calcule alors la proposition de corps dont la torsion est non triviale.

$$N = 10^6$$

p	$M_2(\Pi_p)$	f_{exp}	δ
2	0,71118	0,85081	0,19634
3	0,43987	0,46489	0,05687
5	0,23967	0,23117	0,03545
7	0,16320	0,15921	0,02446
11	0,09917	0,09670	0,02485
13	0,08284	0,08207	0,00927
17	0,06228	0,06249	0,00334
19	0,05540	0,05654	0,02053
23	0,04537	0,04527	0,00207
29	0,03567	0,03443	0,03475
31	0,03330	0,03229	0,03031
37	0,02776	0,02722	0,01950
41	0,02499	0,02551	0,02112
43	0,02380	0,02256	0,05179
47	0,02173	0,02165	0,00372

$$N = 10^7$$

p	$M_{2,0}(\Pi_p)$	f_{exp}	δ
2	0,71118	0,86801	0,22052
3	0,43987	0,48970	0,11327
5	0,23967	0,23555	0,01718
7	0,16320	0,16170	0,00920
11	0,09917	0,09886	0,00314
13	0,08284	0,08258	0,00308
17	0,06228	0,06290	0,00988
19	0,05540	0,05520	0,00355
23	0,04537	0,04498	0,00862
29	0,03567	0,03544	0,00646
31	0,03330	0,03310	0,00590
37	0,02776	0,02752	0,00839
41	0,02499	0,02522	0,00923
43	0,02380	0,02371	0,00380
47	0,02173	0,02168	0,00216

$$N = 10^8$$

3.2. COMPARAISON AVEC LES RÉSULTATS NUMÉRIQUES. 65

p	$M_{2,0}(\Pi_p)$	f_{exp}	δ
2	0,71118	0,87768	0,23412
3	0,43987	0,50299	0,14348
5	0,23967	0,23717	0,01041
7	0,16320	0,16254	0,00409
11	0,09917	0,09897	0,00199
13	0,08284	0,08270	0,00164
17	0,06228	0,06227	0,00017
19	0,05540	0,05534	0,00115
23	0,04537	0,04526	0,00236
29	0,03567	0,03551	0,00461
31	0,03330	0,03312	0,00525
37	0,02776	0,02764	0,00413
41	0,02499	0,02487	0,00452
43	0,02380	0,02377	0,00092
47	0,02173	0,02166	0,000321

$$N = 10^9$$

p	$M_2(\Pi_p)$	f_{exp}	δ
2	0,71118	0,88357	0,24240
3	0,43987	0,51187	0,16367
5	0,23967	0,23845	0,00510
7	0,16320	0,16289	0,00194
11	0,09917	0,09906	0,00107
13	0,08284	0,08278	0,00075
17	0,06228	0,06229	0,00017
19	0,05540	0,05531	0,00160
23	0,04537	0,04536	0,00008
29	0,03567	0,03564	0,00075
31	0,03330	0,03325	0,00138
37	0,02776	0,02774	0,00066
41	0,02499	0,02496	0,00110
43	0,02380	0,02377	0,00128
47	0,02173	0,02171	0,00068

On va maintenant voir la répartition de la torsion en fonction des invariants. On commence par donner une table des fréquences théoriques, puis les fréquences expérimentales pour $N = 10^6$, $N = 10^7$, $N = 10^8$ et $N = 10^9$.

p	invariants	(p)	(p, p)	(p^2)	(p, p, p)	(p^2, p)	(p^3)
2		0,28882	0,048137	0,14441	0,00258	0,01203	0,07221
3		0,28006	0,01167	0,09335	0,00007	0,00259	0,03112
5		0,19008	0,00158	0,03802	0,0000006	0,00025	0,00760
7		0,13947	0,00042	0,01992	0,00000003	0,00005	0,00285
11		0,09008	0,00007	0,00819	0,000000005	0,00006	0,00074
13		0,07643	0,00004	0,00588	0,000000001	0,00002	0,00045
17		0,05861	0,00001	0,00345	0,0000000009	0,000007	0,00020
19		0,05248	0,000008	0,00276	0,00000000003	0,000004	0,00015
23		0,04339	0,000004	0,00189	0,00000000006	0,00000015	0,00008
29		0,03444	0,000001	0,00119	0,000000000007	0,00000005	0,00004
31		0,03222	0,000001	0,00104	0,000000000004	0,00000003	0,00003
37		0,02701	0,0000005	0,00073	0,00000000000008	0,00000001	0,00002
41		0,02438	0,0000004	0,00059	0,00000000000003	0,000000008	0,00001
43		0,02324	0,0000003	0,00054	0,00000000000002	0,000000007	0,00001
47		0,02127	0,0000002	0,00045	0,00000000000009	0,00000004	0,00001

$$N = 10^6$$

p	invariants	(p)	(p, p)	(p^2)	(p, p, p)	(p^2, p)	(p^3)
2		0,30703	0,09449	0,15540	0,00266	0,06639	0,07449
3		0,29822	0,01364	0,09678	0,00004	0,00559	0,03147
5		0,18249	0,00093	0,03802	0,00000	0,00022	0,00771
7		0,13709	0,00040	0,01852	0,00000	0,00009	0,00273
11		0,08753	0,00011	0,00817	0,00000	0,00004	0,00081
13		0,07555	0,00005	0,00599	0,00000	0,00002	0,00044
17		0,05857	0,00000	0,00364	0,00000	0,00000	0,00026
19		0,03535	0,00000	0,00280	0,00000	0,00000	0,00007
23		0,04319	0,00000	0,00200	0,00000	0,00000	0,00007
29		0,03317	0,00002	0,00119	0,00000	0,00000	0,00005
31		0,03119	0,00000	0,00108	0,00000	0,00000	0,00002
37		0,02647	0,00000	0,00073	0,00000	0,00000	0,00002
41		0,02493	0,00000	0,00059	0,00000	0,00000	0,00000
43		0,02211	0,00000	0,00044	0,00000	0,00000	0,00002
47		0,02126	0,00000	0,00038	0,00000	0,00000	0,00000

$$N = 10^7$$

$p \backslash$ invariants	(p)	(p, p)	(p ²)	(p, p, p)	(p ² , p)	(p ³)
2	0,29035	0,10160	0,15366	0,00507	0,07604	0,07255
3	0,30661	0,01762	0,10266	0,00013	0,00743	0,03399
5	0,18715	0,00127	0,03743	0,00000	0,00030	0,00758
7	0,13816	0,00041	0,01967	0,00000	0,00007	0,00288
11	0,08990	0,00007	0,00808	0,00000	0,00001	0,00070
13	0,07608	0,00004	0,00593	0,00000	0,00001	0,00049
17	0,05921	0,00002	0,00343	0,00000	0,00000	0,00023
19	0,05233	0,00001	0,00273	0,00000	0,00000	0,00013
23	0,04304	0,00001	0,00187	0,00000	0,00000	0,00006
29	0,03417	0,000002	0,00123	0,00000	0,00000	0,00004
31	0,03199	0,000002	0,00108	0,00000	0,00000	0,00003
37	0,02682	0,00000	0,00069	0,00000	0,00000	0,00002
41	0,02462	0,000003	0,00058	0,00000	0,00000	0,00001
43	0,02320	0,00000	0,00049	0,00000	0,00000	0,00002
47	0,02123	0,000002	0,00045	0,00000	0,00000	0,00001

$$N = 10^8$$

p	invariants	(p)	(p, p)	(p^2)	(p, p, p)	(p^2, p)	(p^3)
2		0,27715	0,10559	0,14789	0,00702	0,00007	0,07157
3		0,31488	0,02277	0,10534	0,00029	0,01017	0,03507
5		0,18920	0,00153	0,03782	0,00000	0,00037	0,00755
7		0,13919	0,00041	0,01990	0,00000	0,00007	0,00284
11		0,08998	0,00007	0,00819	0,00000	0,00001	0,00074
13		0,07638	0,00003	0,00587	0,00000	0,000003	0,00045
17		0,05861	0,00001	0,00345	0,00000	0,0000009	0,00021
19		0,05239	0,00001	0,00276	0,00000	0,0000003	0,00014
23		0,04338	0,000004	0,00189	0,00000	0,0000001	0,00008
29		0,03441	0,000002	0,00119	0,00000	0,0000001	0,00004
31		0,03217	0,0000009	0,00104	0,00000	0,0000002	0,00003
37		0,02699	0,0000004	0,00073	0,00000	0,0000006	0,00002
41		0,02435	0,0000005	0,00059	0,00000	0,00000	0,00001
43		0,02322	0,0000002	0,00054	0,00000	0,00000	0,00002
47		0,02123	0,0000003	0,00045	0,00000	0,00000	0,00001

$$N = 10^9$$

$p \backslash$ invariants	(p)	(p, p)	(p ²)	(p, p, p)	(p ² , p)	(p ³)
2	0,26826	0,10815	0,14486	0,00866	0,08671	0,07051
3	0,31488	0,02277	0,10534	0,00029	0,01017	0,03507
5	0,18920	0,00153	0,03782	0,00000	0,00037	0,00755
7	0,13919	0,00041	0,01990	0,00000	0,00007	0,00284
11	0,08998	0,00007	0,00819	0,00000	0,00001	0,00074
13	0,07638	0,00003	0,00587	0,00000	0,000003	0,00045
17	0,05861	0,00001	0,00345	0,00000	0,000009	0,00021
19	0,05239	0,00001	0,00276	0,00000	0,000003	0,00014
23	0,04338	0,000004	0,00189	0,00000	0,0000001	0,00008
29	0,03441	0,000002	0,00119	0,00000	0,0000001	0,00004
31	0,03217	0,0000009	0,00104	0,00000	0,00000002	0,00003
37	0,02699	0,0000004	0,00073	0,00000	0,00000006	0,00002
41	0,02435	0,0000005	0,00059	0,00000	0,00000	0,00001
43	0,02322	0,0000002	0,00054	0,00000	0,00000	0,00002
47	0,02123	0,0000003	0,00045	0,00000	0,00000	0,00001

Extensions de degré 5

Principe de calcul. On utilise ici les tables de corps de nombres disponibles sur le site dédié à pari-GP [PAR13]. On considère les 22740 corps de nombres de degré 5 et de signature (5, 0) dont le discriminant est inférieur à $2 \cdot 10^7$.

p	$M_2(\Pi_p)$	f_{exp}	δ
2	0,71118	0,88821	0,24894
3	0,43987	0,42836	0,02617
5	0,23967	0,22995	0,04056
7	0,16320	0,16016	0,01867
11	0,09916	0,09745	0,01732
13	0,08284	0,08478	0,02350
17	0,06228	0,06288	0,00966
19	0,05540	0,05616	0,01363
23	0,04537	0,04648	0,02454
29	0,03567	0,03549	0,00515
31	0,03330	0,03276	0,01613
37	0,02776	0,02770	0,00191
41	0,02499	0,02344	0,06189
43	0,02380	0,02392	0,00529
47	0,02173	0,02001	0,07918

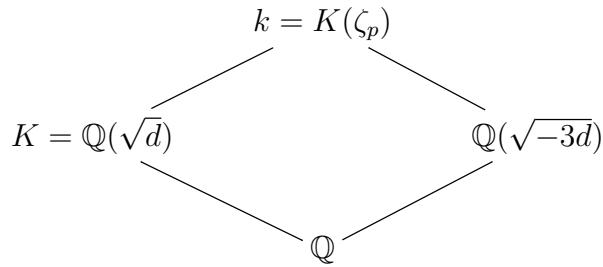
$p \backslash$ invariants	(p)	(p, p)	(p^2)	(p, p, p)	(p^2, p)	(p^3)
2	0,30717	0,12084	0,14723	0,00510	0,07520	0,07040
3	0,28096	0,00721	0,09077	0,00000	0,00290	0,03008
5	0,18391	0,00088	0,03659	0,00000	0,00018	0,00699
7	0,13531	0,00048	0,02097	0,00000	0,00009	0,00290
11	0,08808	0,00018	0,00831	0,00000	0,00000	0,00084
13	0,07823	0,00004	0,00589	0,00000	0,00004	0,00053
17	0,05897	0,00001	0,00356	0,00000	0,00000	0,00022
19	0,05286	0,00004	0,00290	0,00000	0,00000	0,00035
23	0,04445	0,00000	0,00189	0,00000	0,00000	0,00004
29	0,03408	0,00000	0,00141	0,00000	0,00000	0,00000
31	0,03179	0,00000	0,00092	0,00000	0,00000	0,00004
37	0,02700	0,00000	0,00065	0,00000	0,00000	0,00004
41	0,02265	0,00000	0,00075	0,00000	0,00000	0,00000
43	0,00235	0,00000	0,00040	0,00000	0,00000	0,00000
47	0,01957	0,00000	0,00044	0,00000	0,00000	0,00000

3.3 Explication des résultats numériques

On a remarqué dans les tables de la section 3.2.1 que pour des corps totalement réels la proportion f_{exp} était une 0-moyenne et 1-moyenne dans le cas quadratique imaginaire. On remarque que pour $p = 2, 3$ le défaut est très grand et augmente avec le nombre de corps considéré. Dans cette section on va tenter d'expliquer ces phénomènes, on commence par rappeler un résultat de Gras [Gra82] p.94-97. Soit k un corps de nombres, on note $k = K(\zeta_p)$ et ω l'idempotent associé au caractère à action de $\text{Gal}(k/K)$ sur μ_p .

Théorème 3.3.1. (*Corollaire 1 p. 96 [Gra82]*). *Soit p un nombre premier k , $p \neq 2$. Si $\mu_p \not\subset K$ alors la torsion de \mathfrak{X} est non-triviale si et seulement si aucun idéal au dessus de p n'est totalement décomposé et si $(Cl_K)^\omega$, où Cl_K est le groupe de classe de K .*

Si $p > 3$ alors $\mu_p \not\subset k$ et l'indice de ramification de p dans $\mathbb{Q}(\zeta_p)/\mathbb{Q}$ est $p - 1$ donc chaque idéal de K se ramifie dans k . Ainsi les idéaux au dessus de p ne sont pas totalement décomposés dans k/K ainsi la torsion de \mathfrak{X} est triviale si et seulement si $(Cl_K)^\omega$ est triviale. Alors pour un corps totalement réel le calcul de cette torsion est ramené au calcul d'un groupe de classe d'un corps quadratique imaginaire. Ceci justifie l'utilisation d'une 0-moyenne d'après les heuristiques de Cohen-Lenstra [CL84]. De même pour les corps quadratiques réels la remarque de Gras ([Gra82], p. 96-97) justifie l'utilisation 1-moyenne. Pour le cas $p = 2$ la théorie des genres explique que la proportion f_{exp} tend vers 1 lorsque que l'on fait tendre la borne du discriminant vers l'infini. Enfin pour $p = 3$ les idéaux au dessus de p dans K peuvent être totalement décomposés dans k et ainsi la torsion est non triviale. Considérons le diagramme suivant :



Dans le cas des corps quadratiques réels les idéaux au dessus de p dans K sont totalement décomposés dans k , si $d \equiv 6 \pmod{9}$. En effet 3 est ramifiée

dans l'extension $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ car 3 divise d et 3 est totalement composé dans l'extension $\mathbb{Q}(\sqrt{\frac{-d}{3}})/\mathbb{Q}$ car $\frac{-d}{3} \equiv 1 \pmod{3}$ ainsi comme $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})(\zeta_3)$ le compositum de ces deux extensions l'idéal au dessus de p est totalement décomposé dans l'extension k/K . En considérant que pour $d \equiv 6 \pmod{9}$ c'est à dire un huitième des corps considéré la torsion était non triviale et que les autres suivaient les heuristiques, on introduit alors une nouvelle moyenne $M'_2(\Pi_3) = M_{2,0}(\Pi_3) \times \frac{7}{8} + \frac{1}{8}$, dans les cas réels on obtient alors :

N	$M'_2(\Pi_3)$	f_{exp}	δ
10^6	0,50989	0,48094	0,05678
10^7	0,50989	0,49054	0,03794
10^8	0,50989	0,49697	0,02533
10^9	0,50809	0,50120	0,01704

Si on refait le même calcul en excluant les $d \equiv 6 \pmod{9}$, on obtient alors le résultat suivant :

N	$M_{2,0}(\Pi_3)$	f_{exp}	δ
10^6	0,43987	0,40679	0,07521
10^7	0,43987	0,41776	0,05027
10^8	0,43987	0,42511	0,03356
10^9	0,43987	0,42995	0,02257

On s'est ensuite intéressé au 9-rang de la torsion dans le cas où $d \equiv 6 \pmod{9}$.

Heuristique sur le 9-rang dans le cas où $d \equiv 6 \pmod{9}$.

On calcule la torsion pour des corps quadratique $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ avec $d \equiv 6 \pmod{9}$, $0 < d \leq N$ en accord avec ce qui précède nous avons trouvé qu'elle était toujours non triviale, On s'est alors intéressé au 9-rang de cette torsion. On calcule la torsion des corps considéré et l'on triée en fonction des invariants.

Pour Tous les corps que l'on a pris on savait que la torsion allait être non triviale. Si maintenant on prend une autre moyenne $M''(\Pi) = M(\Pi)/M_3(\Pi)$. En effet $M''(\Pi)$ est la probabilité que le 9 rang soit non nul sachant que la torsion est non triviale. C'est pour que que l'on divise $M_3(\Pi)$ la probabilité que la torsion soit non triviale.

$$N = 10^7$$

fréquences invariants \	$M_{2,0}(\Pi_3)$	f_{exp}	δ
(p)	0.63669	0,58360	0,08338
(p, p)	0.02653	0,07983	2,00929
(p^2)	0.21223	0,19004	0,10457
(p, p, p)	0,00011	0,00053	3,63135
(p^2, p)	0,01179	0,03406	1,88901
(p^3)	0,07074	0,06242	0,11765
(p, p, p, p)	10^{-7}	0,00000	1,00000
(p^2, p, p)	0,00005	0,00025	3,62867
(p^2, p^2)	0,00033	0,00086	1,61568
(p^3, p)	0,00393	0,01128	1,86982
(p^4)	0,02358	0,02062	0,12543
(p, p, p, p, p)	$3*10^{-12}$	0,00000	1,00000
(p^2, p, p, p)	$3*10^{-8}$	0,00000	1,00000
(p^2, p^2, p)	0,00002	0,000009	0,49374
(p^3, p, p)	0,00002	0,00009	4,13493
(p^3, p^2)	0,00015	0,00036	1,44994
(p^4, p)	0,00131	0,00380	1,90397
(p^5)	0,00786	0,00677	0,13849
(p, p, p, p, p, p)	$2*10^{-17}$	0,00000	1,00000
(p^2, p, p, p, p)	10^{-13}	0,00000	1,00000
(p^2, p^2, p, p)	10^{-9}	0,00000	1,00000
(p^2, p^2, p^2)	10^{-8}	0,00000	1,00000
(p^3, p, p, p)	10^{-8}	0,00000	1,00000
(p^3, p^2, p)	$9*10^{-7}$	0,000003	1,92908
(p^3, p^3)	0,00001	0,00001	1,12147
(p^4, p, p)	0,00001	0,00002	2,68847
(p^4, p^2)	0,00005	0,00012	1,49514
(p^5, p)	0,00044	0,00121	1,77841
(p^6)	0,00262	0,00230	0,12208

(p, p, p, p, p, p, p, p)	$9*10^{-24}$	0,0000	1,00000
(p^2, p, p, p, p, p)	$3*10^{-18}$	0,0000	1,00000
(p^2, p^2, p, p, p)	$2*10^{-16}$	0,0000	1,00000
(p^2, p^2, p^2, p)	$4*10^{-12}$	0,0000	1,00000
(p^3, p, p, p, p)	$4*10^{-11}$	0,0000	1,00000
(p^3, p^2, p, p)	$5*10^{-10}$	0,0000	1,00000
(p^3, p^2, p^2)	$3*10^{-9}$	0,0000	1,00000
(p^3, p^3, p)	$2*10^{-8}$	0,0000	1,00000
(p^4, p, p, p)	$3*10^{-9}$	0,0000	1,00000
(p^4, p^2, p)	$3*10^{-7}$	0,000001	3,39362
(p^4, p^3)	$2*10^{-6}$	0,000004	1,19681
(p^5, p, p)	$2*10^{-6}$	0,000009	3,55635
(p^5, p^2)	0,00002	0,00003	1,03408
(p^6, p)	0,00015	0,00043	1,92908
(p^7)	0,00087	0,0074	0,15020
Total avec p^2 qui divise un invariant	0,33617	0,33546	0,00211

Les tableaux pour $N = 10^8$ et $N = 10^9$ sont en annexes 5.0.4

Extensions cycliques de degré 5

Principe de calcul : On va ici utiliser les tables de corps de nombres disponibles sur le site dédié au logiciel pari-GP. On a considéré les 22740 premiers corps de nombres de degré 5 dont les discriminants sont inférieurs à $2 * 10^7$ et de signature $(5, 0)$, figurant dans ces tables. Ici encore, le module \mathfrak{X} n'est a priori qu'un \mathbb{Z} -module et les résultats que l'on obtient semblent être en adéquation avec les heuristiques énoncés précédemment.

p	$M_2(\Pi_p)$	f_{exp}	$\delta(\text{Écart})$
3	0,43987	0,42836	0,01151
5	0,23967	0,22995	0,00972
7	0,16320	0,16016	0,00304
11	0,09916	0,09745	0,00171
13	0,08284	0,08478	0,00194
17	0,06228	0,06288	0,00060
19	0,05540	0,05616	0,00076
23	0,04537	0,04648	0,00111
29	0,03567	0,03549	0,00018
31	0,03330	0,03276	0,00054
37	0,02776	0,02770	0,00006
41	0,02499	0,02344	0,00155
43	0,02380	0,02392	0,00012
47	0,02173	0,02001	0,00172

p \ invariants	(p)	(p, p)	(p^2)	(p, p, p)	(p^2, p)	(p^3)
3	0,28096	0,00721	0,09077	0,00000	0,00290	0,03008
5	0,18391	0,00088	0,03659	0,00717	0,00000	0,00000
7	0,13531	0,00048	0,02097	0,00299	0,00000	0,00000
11	0,08808	0,00018	0,00831	0,00084	0,00000	0,00000
13	0,07823	0,00004	0,00589	0,00057	0,00000	0,00000
17	0,05897	0,00001	0,00356	0,00021	0,00000	0,00000
19	0,05286	0,00004	0,00290	0,00035	0,00000	0,00000
23	0,04445	0,00000	0,00189	0,00004	0,00000	0,00000
29	0,03408	0,00000	0,00141	0,00000	0,00000	0,00000
31	0,03179	0,00000	0,00092	0,00004	0,00000	0,00000
37	0,02700	0,00000	0,00065	0,00004	0,00000	0,00000
41	0,02265	0,00000	0,00075	0,00040	0,00000	0,00000
43	0,00235	0,00000	0,00040	0,00000	0,00000	0,00000
47	0,01957	0,00000	0,00044	0,00000	0,00000	0,00000

3.3.1 Incidence de la signature du corps

Pour l'instant, on n'a effectué que des calculs pour des corps de signatures constantes ou sans se préoccuper de celles-ci. Dans cette section, on étudie l'incidence de la signature du corps sur la fréquence d'apparition du module

\mathcal{T}_p . En utilisant les tables de nombres disponibles sur le site dédié à pari-GP, on a calculé les fréquences d'apparition de \mathcal{T}_p pour des corps de nombres de degré 3 et 5, dont les signatures sont respectivement $(1, 1)$ et $(3, 3)$ d'une part et $(1, 2), (3, 1)$ d'autre part. Les résultats obtenus sont consignés dans les tableaux ci-dessous. On tentera ensuite d'interpréter les résultats obtenus.

Cas des corps de degré 3.

p	$f_{exp}(1, 1)$
3	0,23427
5	0,04526
7	0,02205
11	0,00865
13	0,00624
17	0,00356
19	0,00289
23	0,00201
29	0,00120
31	0,00101
37	0,00073
41	0,00059
43	0,00056
47	0,00048

Répartition pour les corps cubiques et de signature $(1,1)$.

p	invariants	(p)	(p, p)	(p^2)	(p, p, p)	(p^2, p)	(p^3)
3		0,20534	0,00419	0,02156	0,00001	0,00241	0,01135
5		0,04336	0,00003	0,00181	0,00000	0,00000	0,00152
7		0,02162	0,00000	0,00043	0,00000	0,00000	0,00000
11		0,00856	0,00000	0,00006	0,00000	0,00000	0,00000
13		0,000621	0,00000	0,00003	0,00000	0,00000	0,00000
17		0,00355	0,00000	0,00001	0,00000	0,00000	0,00000
19		0,00288	0,00000	0,00001	0,00000	0,00000	0,00000
23		0,00200	0,00000	0,00001	0,00000	0,00000	0,00000
29		0,00120	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
31		0,00101	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
37		0,00073	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
41		0,00059	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
43		0,00056	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
47		0,00048	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000

Cas des corps de degré 5 :

p	$f_{exp}(1, 2)$	$f_{exp}(3, 1)$	$f_{exp}(5, 0)$
3	0,12613	0,15639	0,42837
5	0,00686	0,03435	0,22995
7	0,00262	0,02065	0,16016
11	0,00103	0,00963	0,09745
13	0,00024	0,00509	0,08478
17	0,00021	0,00333	0,06288
19	0,00017	0,00287	0,05616
23	0,00003	0,00269	0,04648
29	0,00000	0,00139	0,03549
31	0,00000	0,00139	0,03276
37	0,00000	0,00083	0,02770
41	0,00000	0,00037	0,02344
43	0,00000	0,00056	0,02392
47	0,00000	0,00056	0,02001

Répartition pour les corps de degré 5 et de signature (1,2).

$p \backslash$ invariants	(p)	(p, p)	(p ²)	(p, p, p)	(p ² , p)	(p ³)
3	0,12206	0,00145	0,00248	0,00000	0,00003	0,00007
5	0,00679	0,00000	0,00007	0,00000	0,00000	0,00000
7	0,00259	0,00000	0,00003	0,00000	0,00000	0,00000
11	0,00103	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
13	0,00024	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
17	0,00021	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
19	0,00017	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
23	0,00003	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
29	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
31	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
37	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
41	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
43	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
47	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000

Répartition pour les corps de degré 5 et de signature (3,1).

$p \backslash$ invariants	(p)	(p, p)	(p ²)	(p, p, p)	(p ² , p)	(p ³)
3	0,14009	0,00204	0,01259	0,00000	0,00000	0,00167
5	0,03287	0,00000	0,00139	0,00000	0,00000	0,00000
7	0,02028	0,00000	0,00028	0,00000	0,00000	0,00000
11	0,00963	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
13	0,00509	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
17	0,00333	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
19	0,00287	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
23	0,00269	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
29	0,00139	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
31	0,00139	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
37	0,00083	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
41	0,00037	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
43	0,00056	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
47	0,00056	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000

On observe que comme pour les corps quadratiques imaginaires pour les corps n'ayant qu'une seule place complexe la fréquence obtenue est de proche de la 1-moyenne de Π_p .

p	$M_{2,1}(\Pi_p)$	$f_{exp}(1, 1)$	$f_{exp}(2, 1)$
3	0,15981	0,23427	0,15639
5	0,04958	0,04526	0,03435
7	0,02374	0,02205	0,02065
11	0,00908	0,00865	0,00963
13	0,00641	0,00624	0,00509
17	0,00368	0,00356	0,00333
19	0,00292	0,00289	0,00287
23	0,00198	0,00201	0,00269
29	0,00123	0,00120	0,00139
31	0,00108	0,00101	0,00139
37	0,00075	0,00073	0,00083
41	0,00061	0,00059	0,00037
43	0,00055	0,00056	0,00056
47	0,00046	0,00048	0,00056

Les résultats numériques obtenus précédemment semblent en accord avec les heuristiques de Cohen-Lenstra [CL84].

Chapitre 4

Application à la conjecture de Greenberg.

On note A_n le p -sous groupe de Sylow du groupe de classe de K_n où K_n est le n -ème étages de l'extension cyclotomique. Alors il existe deux entiers λ et μ dépendant seulement de K et p , tel que pour n assez grand $\#(A_n) = p^{\lambda n + \mu p^n + \nu}$ [Iwa73]. Il est conjecturé que dans le cas totalement réel que $\#A_n$ est bornée donc λ et μ sont nuls. Ceci est démontré pour μ dans les cas abélien voir [FW79], mais pour λ rien n'a été démontré.

4.0.2 Équivalent à la conjecture de Greenberg

On note D_n le p sous groupe de sylow du groupe des classes engendré par les places au dessus de p dans K_n .

Théorème 4.0.2. ([Tay99] Théorème 2 p.173)

Soit K un corps de nombre abélien sur \mathbb{Q} totalement réel et soit p un nombre premier impair totalement décomposé dans K/\mathbb{Q} . Alors la conjecture de Greenberg est vérifiée si et seulement si pour n assez grand.

$$\#D_n = \#\mathcal{T}_p$$

4.0.3 Exemple de la conjecture de Greenberg.

Dans cette section on a donné des exemples de corps quadratiques réels vérifiant la conjecture de Greenberg. On utilise le critère énoncé précédemment. Pour un corps $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ donné on calcule du sous-groupe engendré par les places

84 CHAPITRE 4. APPLICATION À LA CONJECTURE DE GREENBERG.

au dessus de p . On peut calculer le cardinal de sa p -partie et le comparer à celui de la torsion. La torsion sera calculée en utilisant l'algorithme. Le problème de cette méthode c'est que pour calculer $\#D_n$, il faut monter dans l'extension cyclotomique et donc calculer des corps de grand degré c'est pour cela que l'on se limite à l'étage 0 et 1 pour faire ces calculs, pour éviter les trop grands degrés. Dans le tableau ci-dessous on donne les résultats seulement lorsque la torsion est non triviale pour $p = 5$.

d	$\#(D_0)$	$\#(D_1)$	$\#(\mathcal{T}_p)$
39	1	5	5
51	1	5	5
69	5	5	5
89	25	25	25
109	5	5	5
114	1	5	5
134	5	5	5
139	25	25	25
161	5	5	5
186	1	1	5
191	25	25	25
211	5	5	5
214	5	5	5
241	5	5	5
259	1	1	5
271	5	5	5
314	1	5	5
326	1	5	5
366	1	5	5
401	5	5	5
426	1	5	5
434	1	1	25
439	5	5	5
466	1	5	5
489	5	5	5
499	5	5	5

d	$\#(D_0)$	$\#(D_1)$	$\#(\mathcal{T}_p)$
501	5	5	5
509	5	5	5
514	1	1	25
519	1	5	5
526	5	5	5
534	1	1	5
541	5	5	5
574	1	5	5
581	5	5	5
589	25	25	25
606	1	1	125
626	1	5	5
629	1	5	5
634	1	1	125
674	1	5	5
699	1	1	5
719	5	5	5
734	5	5	5
761	1	5	5
789	5	5	5
791	1	1	5
869	5	5	5
874	5	5	5
881	5	5	5
966	1	5	5

La conjecture de Greenberg est donc vraie pour les corps quadratiques $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ avec $d \leq 1000$ sauf pour 9 cas ($d=186, 259, 434, 514, 534, 606, 634, 699, 791$) où l'on ne peut pas conclure. Il faudrait calculer $\#(D_2)$ et si on ne peut toujours pas conclure alors il faut calculer $\#(D_3)$ et ainsi de suite mais cela reviendrait à calculer un corps de degré 50. Ce qui est très lourd en calcul.

Tous les cas que l'on a étudié pour les moments la torsion était de rang 1. On donne des exemples de corps quadratiques pour $p = 5$ où la torsion est de rang supérieur à deux. On donnera des exemples où la conjecture de Greenberg est vérifiée.

86 CHAPITRE 4. APPLICATION À LA CONJECTURE DE GREENBERG.

d	$\#(D_0)$	$\#(D_1)$	invariants de la torsion \mathcal{T}_p
22621	5	25	[5,5]
47751	5	25	[5,5]
105854	5	25	[5,5]
126159	5	25	[5,5]
141994	5	25	[5,5]
178149	5	25	[5,5]
196914	25	75	[25,5]
244641	5	25	[5,5]
304391	5	25	[5,5]
308491	5	25	[5,5]
319499	5	25	[5,5]
336589	5	25	[5,5]
344674	5	25	[5,5]
370699	5	25	[5,5]
371149	5	25	[5,5]
405461	5	25	[5,5]
414934	5	25	[5,5]
440791	5	25	[5,5]
441974	5	25	[5,5]
487591	5	25	[5,5]
511051	5	25	[5,5]
526874	5	25	[5,5]
544314	5	25	[5,5]
576646	5	25	[5,5]
622931	5	25	[5,5]
624779	5	25	[5,5]
628951	5	25	[5,5]
661639	5	25	[5,5]
689879	5	25	[5,5]
694194	5	25	[5,5]

d	$\#(D_0)$	$\#(D_1)$	invariants de la torsion \mathcal{T}_p
712601	5	25	[5,5]
715186	5	25	[5,5]
738251	5	25	[5,5]
745499	5	25	[5,5]
766031	5	25	[5,5]
765139	5	25	[5,5]
775254	5	25	[5,5]
823074	5	25	[5,5]
825974	5	25	[5,5]
835149	5	25	[5,5]
849859	5	25	[5,5]
852789	5	25	[5,5]
857939	5	25	[5,5]
886451	5	25	[5,5]
890834	5	25	[5,5]
933626	5	25	[5,5]
993631	5	25	[5,5]

Chapitre 5

Annexe

5.0.4 Heuristique sur le 9-rang (section 3.3).

$$N = 10^8$$

fréquences invariants	$M_{2,0}(\Pi_3)$	f_{exp}	δ
(p)	0,63669	0,57564	0,09589
(p, p)	0,02653	0,08426	2,17629
(p^2)	0,21223	0,18861	0,11128
(p, p, p)	0,00011	0,00072	5,39223
(p^2, p)	0,01179	0,03665	2,10830
(p^3)	0,07074	0,06260	0,11516
(p, p, p, p)	10^{-7}	0,0000001	1,50721
(p^2, p, p)	0,00005	0,00033	5,07999
(p^2, p^2)	0,00033	0,00095	1,89535
(p^3, p)	0,00393	0,01216	2,09444
(p^4)	0,02358	0,02085	0,11516
(p, p, p, p, p)	$3 * 10^{-12}$	0,00000	1,00000
(p^2, p, p, p)	$3 * 10^{-8}$	0,00000	1,00000
(p^2, p^2, p)	0,00002	0,00001	0,26230
(p^3, p, p)	0,00006	0,00011	1,81519
(p^3, p^2)	0,00015	0,00041	5,11856
(p^4, p)	0,00131	0,00406	2,10197
(p^5)	0,00786	0,00692	0,12012

fréquences invariants	$M_{2,0}(\Pi_3)$	f_{exp}	δ
(p, p, p, p, p, p)	$2 * 10^{-17}$	0,00000	1,00000
(p^2, p, p, p, p)	10^{-13}	0,00000	1,00000
(p^2, p^2, p, p)	10^{-9}	0,00000	1,00000
(p^2, p^2, p^2)	10^{-8}	0,00000	1,00000
(p^3, p, p, p)	10^{-8}	0,00000	1,00000
(p^3, p^2, p)	$9 * 10^{-7}$	0,00000	1,00000
(p^3, p^3)	0,00001	0,00001	3,68656
(p^4, p, p)	0,00001	0,00004	0,56219
(p^4, p^2)	0,00005	0,00014	7,44557
(p^5, p)	0,00044	0,00134	0,06160
(p^6)	0,00262	0,00229	0,95751
(p, p, p, p, p, p, p, p)	$9 * 10^{-24}$	0,00000	1,00000
(p^2, p, p, p, p, p)	$3 * 10^{-8}$	0,00000	1,00000
(p^2, p^2, p, p, p)	$2 * 10^{-16}$	0,00000	1,00000
(p^2, p^2, p^2, p)	$4 * 10^{-12}$	0,00000	1,00000
(p^3, p, p, p, p)	$4 * 10^{-11}$	0,00000	1,00000
(p^3, p^2, p, p)	$5 * 10^{-10}$	0,00000	1,00000
(p^3, p^2, p^2)	$3 * 10^{-9}$	0,00000	1,00000
(p^3, p^3, p)	$2 * 10^{-8}$	0,00000	1,00000
(p^4, p, p, p)	$3 * 10^{-9}$	0,00000	1,00000
(p^4, p^2, p)	$3 * 10^{-7}$	3,39362	5,15111
(p^4, p^3)	$2 * 10^{-6}$	0,000004	1,48973
(p^5, p, p)	$2 * 10^{-6}$	0,00001	4,20729
(p^5, p^2)	0,00002	0,00003	1,70942
(p^6, p)	0,00015	0,00043	3,05190
(p^7)	0,00087	0,00074	0,11118
Total avec p^2 qui divise un invariant	0,33617	0,33876	0,00770

$$N = 10^9$$

fréquences invariants \diagdown	$M_{2,0}(\Pi)$	f_{exp}	δ
(p)	0,63669	0,57065	0,10373
(p, p)	0,02653	0,08719	2,28657
(p^2)	0,21223	0,18789	0,11471
(p, p, p)	0,00011	0,00089	6,82378
(p^2, p)	0,01179	0,03827	2,24622
(p^3)	0,07074	0,06253	0,11614
(p, p, p, p)	10^{-7}	0,0000002	2,26082
(p^2, p, p)	0,000025	0,00042	6,61831
(p^2, p^2)	0,00033	0,00102	2,12321
(p^3, p)	0,00393	0,01272	2,23575
(p^4)	0,02358	0,02081	0,11732
(p, p, p, p, p)	$3*10^{-12}$	0,00000	1,00000
(p^2, p, p, p)	$3*10^{-8}$	0,0000002	7,12337
(p^2, p^2, p)	0,00002	0,00001	0,19793
(p^3, p, p)	0,00002	0,00014	6,55346
(p^3, p^2)	0,00015	0,00045	2,09997
(p^4, p)	0,00131	0,00422	2,22186
(p^5)	0,00786	0,00693	0,11876

fréquences invariants	$M_{2,0}(\Pi_3)$	f_{exp}	δ
(p, p, p, p, p, p)	$2*10^{-17}$	0,00000	1,00000
(p^2, p, p, p, p)	10^{-13}	0,00000	1,00000
(p^2, p^2, p, p)	10^{-9}	0,00000	1,00000
(p^2, p^2, p^2)	10^{-8}	0,00000004	5,85410
(p^3, p, p, p)	10^{-8}	0,00000001	5,09253
(p^3, p^2, p)	$9*10^{-7}$	0,00001	6,30811
(p^3, p^3)	0,00001	0,00001	0,88041
(p^4, p, p)	0,00001	0,00005	6,48114
(p^4, p^2)	0,00005	0,00015	8,29990
(p^5, p)	0,00044	0,00140	0,03332
(p^6)	0,00262	0,00230	0,12213
(p, p, p, p, p, p, p, p)	$9*10^{-24}$	0,00000	1,00000
(p^2, p, p, p, p, p)	$3*10^{-18}$	0,00000	1,00000
(p^2, p^2, p, p, p)	$2*10^{-16}$	0,00000	1,00000
(p^2, p^2, p^2, p)	$4*10^{-15}$	0,00000	1,00000
(p^3, p, p, p, p)	$4*10^{-11}$	0,00000	1,00000
(p^3, p^2, p, p)	$5*10^{-10}$	0,00000	1,00000
(p^3, p^2, p^2)	$3*10^{-9}$	0,00000	6,38133
(p^3, p^3, p) ²	$*10^{-8}$	0,00000	6,38133
(p^4, p, p, p)	$2*10^{-8}$	0,00000	1,00000
(p^4, p^2, p)	$3*10^{-7}$	0,000002	5,63441
(p^4, p^3)	$2*10^{-6}$	0,000005	2,03894
(p^5, p, p)	$2*10^{-6}$	0,00001	6,17955
(p^5, p^2)	0,00002	0,00005	1,99582
(p^6, p)	0,00015	0,00046	3,19122
(p^7)	0,00087	0,00077	0,012342
Total avec p^2 qui divise un invariant	0,33617	0,34062	0,01323

5.0.5 Tables numériques.

La table suivante classe les corps quadratiques réel $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ pour $d \leq 10^4$ en fonction de \mathcal{T}_3

	d
$\mathcal{T}_3 = 1$	2, 3, 5, 7, 10, 11, 13, 14, 17, 19, 21, 22, 23, 26, 30, 31, 34, 35, 37, 38, 39, 41, 46, 47, 53, 55, 57, 59, 61, 65, 66, 70, 71, 73, 86, 89, 91, 94, 95, 97, 101, 102, 107, 110, 111, 115, 118, 119, 127, 129, 130, 133, 134, 138, 143, 145, 146, 149, 154, 155, 157, 158, 161, 163, 165, 166, 167, 170, 174, 178, 185, 187, 190, 191, 193, 194, 197, 201, 203, 205, 209, 210, 211, 214, 215, 217, 218, 219, 221, 226, 227, 230, 233, 237, 239, 241, 246, 255, 259, 262, 263, 265, 266, 269, 273, 274, 277, 278, 282, 283, 286, 290, 291, 293, 298, 299, 301, 302, 305, 307, 309, 311, 313, 317, 319, 329, 334, 335, 341, 345, 349, 355, 358, 362, 365, 367, 370, 371, 373, 374, 377, 379, 381, 382, 383, 385, 389, 390, 394, 395, 398, 399, 403, 407, 409, 413, 415, 419, 421, 422, 426, 430, 433, 434, 435, 437, 439, 442, 445, 446, 451, 453, 455, 458, 462, 463, 466, 467, 470, 478, 481, 482, 485, 487, 489, 491, 493, 498, 499, 503, 509, 514, 517, 523, 526, 527, 530, 534, 535, 538, 541, 542, 543, 545, 547, 551, 553, 554, 557, 559, 561, 562, 565, 566, 569, 570, 577, 579, 583, 586, 587, 589, 590, 593, 595, 598, 601, 602, 613, 614, 615, 617, 619, 622, 623, 629, 631, 641, 643, 646, 649, 651, 655, 658, 661, 665, 669, 670, 671, 673, 677, 678, 682, 685, 687, 689, 691, 695, 698, 701, 703, 705, 706, 707, 709, 710, 713, 714, 715, 718, 721, 734, 737, 739, 742, 746, 749, 755, 757, 758, 759, 763, 766, 769, 770, 777, 778, 779, 781, 793, 794, 795, 797, 799, 803, 805, 809, 811, 813, 814, 815, 817, 818, 821, 823, 826, 827, 829, 830, 835, 838, 853, 857, 859, 862, 863, 869, 881, 883, 885, 889, 890, 893, 901, 902, 903, 905, 907, 910, 911, 913, 914, 917, 919, 922, 923, 930, 937, 938, 939, 941, 943, 946, 947, 949, 955, 957, 958, 959, 962, 966, 967, 970, 971, 973, 974, 977, 982, 983, 986, 989, 991, 995, 998, 1001, 1003, 1007, 1011, 1015, 1018, 1019, 1021, 1022, 1030, 1033, 1037, 1038, 1039, 1042, 1045, 1047, 1049, 1054, 1055, 1057, 1061, 1063, 1065, 1066, 1067, 1069, 1070, 1073, 1079, 1081, 1082, 1085, 1087, 1093, 1094, 1097, 1099, 1105, 1106, 1109, 1111, 1115, 1119, 1121, 1123, 1130, 1133, 1138, 1141, 1145, 1146, 1147, 1151, 1154, 1155, 1159, 1163, 1166, 1169, 1173, 1174, 1177, 1178, 1182, 1186, 1187, 1189, 1190, 1193, 1198, 1199, 1201, 1202, 1207, 1209, 1214, 1218, 1219, 1226, 1227, 1231, 1234, 1235, 1243, 1245, 1247, 1253, 1254, 1255, 1259, 1262, 1263, 1265, 1267, 1270, 1271, 1273, 1279, 1281, 1282, 1285, 1286, 1289, 1291, 1301, 1303, 1306, 1309, 1310, 1313, 1315, 1321, 1326, 1327, 1334, 1335, 1337, 1343, 1346, 1349, 1351, 1354, 1355, 1357, 1358, 1361, 1362, 1363, 1366, 1370, 1371, 1378, 1379, 1381, 1382, 1387, 1389, 1391, 1393, 1394, 1398, 1402, 1403, 1405, 1407, 1409, 1411, 1414, 1417, 1418,

	d
$\mathcal{T}_3=1$	1423, 1426, 1427, 1434, 1435, 1438, 1439, 1441, 1442, 1443, 1447, 1451, 1457, 1459, 1461, 1465, 1466, 1469, 1471, 1474, 1481, 1483, 1487, 1490, 1493, 1502, 1505, 1506, 1510, 1513, 1514, 1515, 1517, 1526, 1531, 1533, 1534, 1535, 1537, 1538, 1542, 1543, 1547, 1549, 1553, 1558, 1559, 1561, 1562, 1565, 1569, 1570, 1571, 1574, 1577, 1582, 1583, 1586, 1589, 1591, 1594, 1597, 1598, 1601, 1605, 1606, 1607, 1610, 1613, 1614, 1615, 1618, 1621, 1622, 1623, 1630, 1631, 1633, 1634, 1637, 1643, 1651, 1657, 1658, 1659, 1661, 1667, 1673, 1677, 1679, 1686, 1687, 1693, 1697, 1702, 1703, 1705, 1706, 1709, 1711, 1713, 1717, 1718, 1721, 1722, 1723, 1729, 1730, 1731, 1733, 1739, 1741, 1742, 1747, 1749, 1751, 1754, 1757, 1759, 1762, 1763, 1766, 1767, 1774, 1777, 1778, 1783, 1785, 1786, 1789, 1790, 1794, 1798, 1799, 1801, 1802, 1803, 1807, 1814, 1817, 1819, 1821, 1822, 1823, 1826, 1829, 1831, 1835, 1837, 1839, 1843, 1846, 1853, 1857, 1861, 1873, 1874, 1877, 1879, 1883, 1885, 1886, 1889, 1891, 1893, 1895, 1898, 1902, 1906, 1909, 1913, 1915, 1918, 1919, 1927, 1930, 1931, 1933, 1938, 1939, 1942, 1943, 1947, 1949, 1955, 1958, 1961, 1963, 1967, 1969, 1970, 1974, 1978, 1979, 1981, 1985, 1990, 1991, 1997, 1999, 2001, 2002, 2003, 2011, 2014, 2017, 2018, 2033, 2038, 2039, 2041, 2047, 2051, 2053, 2054, 2062, 2063, 2065, 2066, 2069, 2071, 2073, 2077, 2081, 2082, 2086, 2087, 2090, 2091, 2093, 2095, 2098, 2102, 2105, 2109, 2111, 2113, 2117, 2119, 2127, 2131, 2134, 2135, 2138, 2141, 2145, 2147, 2159, 2162, 2163, 2165, 2171, 2173, 2174, 2179, 2181, 2182, 2183, 2189, 2191, 2195, 2198, 2199, 2203, 2206, 2217, 2218, 2222, 2226, 2227, 2231, 2234, 2235, 2237, 2239, 2242, 2243, 2245, 2249, 2257, 2258, 2261, 2262, 2269, 2271, 2273, 2279, 2282, 2287, 2289, 2290, 2291, 2293, 2294, 2297, 2302, 2305, 2306, 2307, 2309, 2311, 2315, 2317, 2323, 2327, 2334, 2335, 2338, 2341, 2342, 2343, 2345, 2347, 2351, 2353, 2357, 2359, 2361, 2365, 2370, 2377, 2378, 2379, 2381, 2383, 2386, 2389, 2393, 2395, 2397, 2398, 2399, 2402, 2407, 2414, 2415, 2417, 2422, 2426, 2433, 2434, 2435, 2437, 2443, 2446, 2447, 2449, 2455, 2458, 2461, 2462, 2465, 2467, 2471, 2474, 2477, 2479, 2482, 2483, 2485, 2486, 2487, 2489, 2491, 2494, 2497, 2498, 2501, 2503, 2506, 2509, 2513, 2514, 2531, 2533, 2534, 2537, 2542, 2545, 2546, 2551, 2558, 2559, 2563, 2566, 2567, 2569, 2577, 2578, 2581, 2582, 2585, 2586, 2590, 2591, 2594, 2595, 2599, 2602, 2603, 2605, 2606, 2613, 2615, 2617, 2618, 2621, 2622, 2626, 2631, 2633, 2639, 2641, 2642, 2647, 2651, 2653, 2654, 2665, 2667, 2669, 2671, 2674, 2681, 2683, 2685, 2686, 2687, 2689, 2690, 2693, 2698, 2699, 2702, 2710, 2717, 2722, 2723, 2729, 2730, 2731, 2734, 2741, 2746, 2749, 2757, 2761, 2765, 2773, 2774, 2779,

	d
$\mathcal{T}_3=1$	2782, 2785, 2795, 2797, 2798, 2802, 2803, 2806, 2810, 2811, 2813, 2815, 2818, 2827, 2829, 2830, 2834, 2837, 2838, 2839, 2843, 2845, 2846, 2849, 2851, 2854, 2858, 2861, 2863, 2865, 2866, 2869, 2870, 2874, 2878, 2879, 2881, 2882, 2887, 2893, 2897, 2899, 2901, 2905, 2906, 2909, 2911, 2923, 2927, 2930, 2933, 2935, 2937, 2938, 2939, 2945, 2946, 2953, 2954, 2957, 2959, 2963, 2965, 2966, 2969, 2973, 2974, 2977, 2978, 2982, 2983, 2990, 2991, 2998, 2999, 3002, 3009, 3013, 3017, 3018, 3019, 3022, 3026, 3027, 3029, 3031, 3034, 3037, 3043, 3045, 3046, 3049, 3055, 3058, 3061, 3063, 3065, 3070, 3073, 3074, 3077, 3079, 3081, 3083, 3085, 3086, 3089, 3091, 3095, 3097, 3098, 3101, 3103, 3106, 3107, 3109, 3110, 3113, 3115, 3117, 3118, 3121, 3122, 3127, 3131, 3134, 3135, 3139, 3143, 3145, 3149, 3151, 3153, 3154, 3161, 3162, 3167, 3169, 3170, 3171, 3178, 3181, 3182, 3189, 3191, 3193, 3197, 3198, 3202, 3203, 3206, 3214, 3215, 3217, 3218, 3223, 3227, 3230, 3233, 3238, 3239, 3243, 3245, 3247, 3251, 3253, 3257, 3262, 3263, 3265, 3266, 3269, 3271, 3278, 3279, 3286, 3289, 3293, 3295, 3298, 3299, 3301, 3302, 3306, 3310, 3313, 3314, 3315, 3317, 3319, 3322, 3329, 3331, 3333, 3334, 3335, 3341, 3342, 3343, 3346, 3347, 3349, 3351, 3358, 3359, 3361, 3365, 3367, 3369, 3370, 3373, 3374, 3377, 3378, 3379, 3382, 3385, 3386, 3387, 3389, 3395, 3398, 3401, 3403, 3406, 3407, 3409, 3413, 3415, 3418, 3421, 3427, 3431, 3433, 3434, 3439, 3443, 3445, 3455, 3457, 3458, 3459, 3463, 3466, 3473, 3477, 3487, 3491, 3494, 3495, 3497, 3499, 3503, 3505, 3506, 3511, 3513, 3515, 3518, 3521, 3523, 3526, 3529, 3530, 3533, 3535, 3538, 3539, 3541, 3542, 3545, 3547, 3553, 3554, 3557, 3559, 3562, 3563, 3565, 3566, 3567, 3578, 3581, 3583, 3585, 3586, 3587, 3589, 3593, 3595, 3598, 3599, 3601, 3603, 3605, 3607, 3611, 3613, 3614, 3617, 3622, 3623, 3629, 3631, 3634, 3635, 3638, 3639, 3643, 3646, 3649, 3653, 3655, 3658, 3659, 3661, 3671, 3679, 3682, 3683, 3686, 3689, 3691, 3694, 3695, 3697, 3707, 3710, 3711, 3715, 3729, 3730, 3731, 3733, 3734, 3738, 3742, 3743, 3746, 3747, 3749, 3754, 3758, 3761, 3763, 3766, 3767, 3770, 3779, 3782, 3783, 3785, 3790, 3793, 3794, 3797, 3802, 3805, 3809, 3810, 3811, 3814, 3815, 3817, 3818, 3819, 3821, 3823, 3827, 3829, 3833, 3835, 3837, 3838, 3839, 3841, 3845, 3851, 3854, 3857, 3862, 3865, 3866, 3874, 3878, 3882, 3883, 3886, 3890, 3893, 3901, 3902, 3905, 3907, 3909, 3910, 3913, 3914, 3917, 3919, 3923, 3926, 3929, 3935, 3938, 3943, 3946, 3947, 3949, 3953, 3954, 3959, 3961, 3974, 3977, 3982, 3985, 3986, 3991, 3994, 3995, 3998, 3999, 4003, 4006, 4009, 4010, 4013, 4015, 4017, 4019, 4022, 4026, 4027, 4030, 4033, 4035, 4039, 4042, 4043,

	d
$\mathcal{T}_3=1$	4045, 4049, 4051, 4054, 4057, 4058, 4062, 4063, 4066, 4069, 4070, 4071, 4082, 4085, 4090, 4091, 4097, 4102, 4105, 4109, 4111, 4115, 4117, 4118, 4121, 4123, 4127, 4129, 4130, 4133, 4134, 4135, 4138, 4139, 4143, 4147, 4153, 4154, 4157, 4161, 4166, 4170, 4174, 4178, 4179, 4181, 4183, 4186, 4187, 4189, 4190, 4195, 4198, 4201, 4206, 4213, 4223, 4229, 4231, 4233, 4234, 4242, 4243, 4246, 4249, 4251, 4253, 4255, 4258, 4259, 4261, 4262, 4267, 4270, 4271, 4273, 4274, 4277, 4278, 4282, 4287, 4289, 4291, 4298, 4303, 4305, 4309, 4313, 4314, 4318, 4321, 4322, 4323, 4327, 4330, 4331, 4333, 4334, 4337, 4341, 4342, 4343, 4351, 4354, 4357, 4358, 4359, 4363, 4369, 4370, 4373, 4377, 4378, 4379, 4381, 4385, 4386, 4387, 4390, 4393, 4395, 4397, 4403, 4405, 4413, 4414, 4415, 4417, 4421, 4422, 4423, 4426, 4429, 4430, 4431, 4433, 4435, 4438, 4439, 4441, 4442, 4445, 4449, 4454, 4458, 4466, 4467, 4474, 4483, 4485, 4487, 4490, 4494, 4495, 4499, 4501, 4502, 4505, 4510, 4514, 4517, 4521, 4522, 4523, 4530, 4531, 4538, 4539, 4541, 4543, 4546, 4547, 4549, 4559, 4561, 4562, 4565, 4566, 4567, 4570, 4571, 4573, 4574, 4577, 4579, 4582, 4583, 4585, 4586, 4589, 4591, 4593, 4595, 4601, 4602, 4607, 4609, 4610, 4611, 4619, 4621, 4622, 4627, 4629, 4630, 4631, 4633, 4634, 4637, 4638, 4639, 4645, 4658, 4663, 4665, 4666, 4669, 4673, 4678, 4679, 4683, 4685, 4690, 4691, 4694, 4697, 4702, 4703, 4705, 4709, 4710, 4714, 4715, 4717, 4723, 4726, 4730, 4733, 4735, 4738, 4739, 4746, 4747, 4751, 4757, 4759, 4762, 4763, 4769, 4773, 4774, 4777, 4781, 4782, 4786, 4787, 4790, 4791, 4793, 4795, 4798, 4799, 4801, 4807, 4810, 4811, 4813, 4814, 4818, 4819, 4827, 4829, 4834, 4835, 4843, 4847, 4849, 4858, 4859, 4861, 4862, 4871, 4873, 4874, 4877, 4879, 4881, 4882, 4883, 4885, 4890, 4891, 4894, 4895, 4897, 4898, 4899, 4906, 4909, 4917, 4918, 4919, 4921, 4922, 4926, 4930, 4931, 4935, 4937, 4942, 4943, 4946, 4951, 4953, 4955, 4957, 4958, 4962, 4967, 4971, 4978, 4979, 4981, 4987, 4989, 4990, 4991, 4993, 4999, 5002, 5003, 5006, 5007, 5009, 5014, 5015, 5017, 5023, 5027, 5030, 5033, 5034, 5035, 5038, 5045, 5051, 5057, 5065, 5066, 5069, 5071, 5074, 5077, 5078, 5079, 5086, 5087, 5090, 5093, 5097, 5101, 5105, 5106, 5107, 5115, 5117, 5119, 5122, 5126, 5129, 5133, 5135, 5138, 5142, 5146, 5147, 5151, 5153, 5155, 5158, 5159, 5162, 5165, 5167, 5169, 5170, 5171, 5174, 5191, 5195, 5197, 5198, 5201, 5205, 5209, 5213, 5214, 5215, 5219, 5222, 5223, 5227, 5231, 5233, 5241, 5242, 5245, 5246, 5251, 5254, 5257, 5258, 5259, 5267, 5269, 5270, 5273, 5278, 5279, 5282, 5287, 5293, 5294, 5295, 5299, 5305, 5306, 5311, 5313, 5314, 5315, 5317, 5318, 5322, 5323, 5326, 5330, 5335, 5338, 5342, 5345, 5349, 5354, 5357, 5358, 5359, 5362, 5363, 5366, 5367, 5371,

	d
$\mathcal{T}_3=1$	5374, 5377, 5378, 5385, 5387, 5389, 5393, 5394, 5395, 5398, 5399, 5401, 5402, 5403, 5410, 5413, 5414, 5417, 5423, 5426, 5430, 5435, 5443, 5446, 5447, 5449, 5457, 5459, 5462, 5465, 5466, 5467, 5470, 5473, 5474, 5482, 5483, 5485, 5486, 5489, 5493, 5495, 5498, 5501, 5507, 5509, 5518, 5519, 5531, 5534, 5538, 5539, 5543, 5545, 5546, 5549, 5551, 5554, 5555, 5561, 5563, 5565, 5569, 5570, 5573, 5574, 5581, 5582, 5583, 5585, 5587, 5590, 5591, 5593, 5594, 5597, 5601, 5602, 5603, 5605, 5610, 5614, 5615, 5626, 5627, 5630, 5633, 5638, 5641, 5645, 5651, 5653, 5654, 5655, 5657, 5662, 5663, 5665, 5671, 5673, 5677, 5678, 5686, 5689, 5691, 5693, 5695, 5699, 5701, 5705, 5707, 5709, 5710, 5711, 5713, 5717, 5718, 5723, 5726, 5727, 5729, 5731, 5735, 5737, 5743, 5747, 5753, 5754, 5755, 5758, 5759, 5762, 5763, 5765, 5767, 5770, 5771, 5773, 5774, 5777, 5779, 5783, 5785, 5789, 5790, 5794, 5795, 5797, 5806, 5807, 5809, 5813, 5817, 5818, 5826, 5827, 5830, 5833, 5834, 5835, 5837, 5839, 5842, 5845, 5849, 5851, 5854, 5855, 5857, 5862, 5863, 5866, 5867, 5869, 5871, 5873, 5879, 5881, 5882, 5885, 5890, 5891, 5893, 5894, 5899, 5906, 5907, 5909, 5911, 5914, 5917, 5921, 5923, 5926, 5927, 5935, 5939, 5942, 5943, 5945, 5947, 5953, 5957, 5959, 5961, 5962, 5963, 5965, 5966, 5969, 5974, 5977, 5983, 5986, 5987, 5989, 5990, 5995, 5998, 5999, 6002, 6005, 6006, 6007, 6010, 6013, 6014, 6015, 6019, 6022, 6023, 6033, 6034, 6035, 6037, 6041, 6046, 6049, 6059, 6062, 6065, 6067, 6070, 6071, 6073, 6074, 6077, 6078, 6079, 6083, 6085, 6086, 6087, 6089, 6095, 6097, 6098, 6101, 6103, 6105, 6107, 6109, 6110, 6113, 6115, 6118, 6119, 6121, 6122, 6123, 6127, 6130, 6131, 6134, 6139, 6142, 6143, 6145, 6149, 6154, 6155, 6157, 6158, 6161, 6163, 6170, 6173, 6177, 6178, 6179, 6181, 6182, 6190, 6191, 6194, 6197, 6203, 6205, 6206, 6211, 6214, 6215, 6221, 6222, 6226, 6227, 6229, 6230, 6231, 6233, 6235, 6239, 6245, 6247, 6249, 6251, 6257, 6259, 6262, 6263, 6266, 6267, 6269, 6274, 6278, 6281, 6285, 6287, 6290, 6293, 6298, 6299, 6301, 6303, 6313, 6314, 6317, 6319, 6322, 6329, 6330, 6331, 6337, 6339, 6341, 6343, 6346, 6347, 6349, 6353, 6357, 6361, 6362, 6365, 6367, 6371, 6373, 6377, 6379, 6382, 6383, 6386, 6389, 6391, 6393, 6395, 6397, 6402, 6406, 6409, 6410, 6411, 6415, 6418, 6429, 6433, 6434, 6437, 6438, 6439, 6442, 6443, 6445, 6446, 6447, 6449, 6454, 6455, 6457, 6458, 6463, 6466, 6467, 6469, 6470, 6473, 6474, 6479, 6481, 6485, 6487, 6491, 6493, 6497, 6503, 6509, 6510, 6511, 6518, 6519, 6521, 6523, 6526, 6527, 6533, 6537, 6538, 6539, 6541, 6542, 6545, 6546, 6551, 6553, 6554, 6569, 6574, 6577, 6578, 6581, 6582, 6583, 6586, 6587, 6589, 6590, 6595, 6598, 6599, 6605, 6607, 6609, 6611, 6613, 6614, 6617, 6618, 6619, 6622, 6629, 6634,

	d
$\mathcal{T}_3=1$	6635, 6638, 6641, 6643, 6645, 6646, 6649, 6653, 6654, 6659, 6661, 6662, 6665, 6671, 6673, 6674, 6677, 6679, 6682, 6683, 6689, 6690, 6695, 6697, 6698, 6699, 6701, 6706, 6709, 6710, 6715, 6717, 6718, 6721, 6726, 6733, 6734, 6735, 6742, 6743, 6745, 6749, 6753, 6755, 6757, 6763, 6767, 6773, 6778, 6779, 6781, 6787, 6789, 6793, 6802, 6803, 6805, 6814, 6815, 6818, 6821, 6823, 6826, 6827, 6829, 6833, 6838, 6839, 6841, 6842, 6843, 6851, 6853, 6857, 6861, 6862, 6865, 6866, 6870, 6874, 6878, 6879, 6881, 6883, 6886, 6893, 6895, 6898, 6902, 6905, 6906, 6910, 6911, 6914, 6917, 6919, 6923, 6926, 6931, 6933, 6935, 6937, 6941, 6942, 6946, 6947, 6953, 6959, 6961, 6967, 6969, 6970, 6971, 6973, 6978, 6982, 6983, 6986, 6987, 6989, 6991, 6994, 6998, 7003, 7005, 7009, 7010, 7013, 7015, 7021, 7022, 7027, 7030, 7033, 7034, 7037, 7039, 7041, 7042, 7043, 7045, 7046, 7049, 7054, 7059, 7063, 7067, 7069, 7070, 7073, 7077, 7079, 7081, 7082, 7085, 7086, 7090, 7093, 7095, 7099, 7102, 7106, 7111, 7113, 7114, 7121, 7122, 7123, 7127, 7129, 7130, 7131, 7135, 7138, 7141, 7145, 7147, 7149, 7151, 7153, 7158, 7159, 7162, 7163, 7165, 7166, 7167, 7171, 7174, 7178, 7181, 7185, 7186, 7194, 7195, 7199, 7202, 7205, 7207, 7211, 7213, 7217, 7219, 7221, 7222, 7223, 7230, 7237, 7238, 7241, 7243, 7255, 7257, 7258, 7261, 7265, 7266, 7271, 7274, 7277, 7282, 7283, 7285, 7286, 7289, 7291, 7293, 7297, 7298, 7302, 7306, 7313, 7318, 7322, 7327, 7330, 7331, 7333, 7334, 7337, 7338, 7339, 7342, 7343, 7345, 7346, 7347, 7351, 7354, 7358, 7361, 7363, 7365, 7366, 7373, 7378, 7379, 7382, 7385, 7390, 7391, 7394, 7397, 7401, 7402, 7405, 7409, 7410, 7419, 7421, 7426, 7427, 7430, 7433, 7435, 7439, 7454, 7457, 7463, 7477, 7482, 7483, 7486, 7489, 7490, 7491, 7493, 7498, 7499, 7501, 7505, 7507, 7510, 7511, 7517, 7518, 7519, 7523, 7526, 7527, 7529, 7531, 7534, 7535, 7538, 7541, 7547, 7549, 7553, 7555, 7558, 7561, 7562, 7563, 7565, 7570, 7571, 7577, 7579, 7585, 7586, 7589, 7594, 7597, 7599, 7606, 7609, 7613, 7615, 7617, 7618, 7622, 7626, 7627, 7631, 7637, 7645, 7646, 7651, 7653, 7654, 7657, 7661, 7662, 7667, 7669, 7670, 7681, 7682, 7685, 7687, 7697, 7706, 7707, 7714, 7715, 7717, 7718, 7723, 7727, 7729, 7730, 7733, 7734, 7735, 7738, 7739, 7741, 7751, 7754, 7759, 7761, 7762, 7763, 7765, 7766, 7771, 7777, 7778, 7781, 7783, 7786, 7787, 7789, 7790, 7793, 7795, 7799, 7801, 7805, 7806, 7807, 7810, 7811, 7814, 7815, 7817, 7819, 7823, 7826, 7833, 7834, 7837, 7838, 7841, 7842, 7843, 7847, 7849, 7851, 7853, 7855, 7859, 7861, 7862, 7867, 7869, 7871, 7874, 7877, 7882, 7885, 7894, 7895, 7898, 7901, 7907, 7909, 7913, 7914, 7915, 7918, 7922, 7923, 7927, 7931, 7934, 7945, 7946, 7949, 7963, 7966, 7967, 7970, 7973, 7977, 7979, 7982, 7990, 7993, 7995,

	d
$\mathcal{T}_3=1$	8002, 8006, 8009, 8013, 8014, 8021, 8022, 8023, 8031, 8035, 8038, 8039, 8042, 8045, 8047, 8049, 8053, 8054, 8058, 8059, 8062, 8063, 8065, 8074, 8077, 8081, 8083, 8086, 8089, 8117, 8119, 8121, 8122, 8123, 8126, 8129, 8131, 8135, 8138, 8141, 8143, 8146, 8147, 8149, 8153, 8157, 8159, 8161, 8162, 8165, 8166, 8167, 8174, 8177, 8179, 8182, 8185, 8186, 8189, 8191, 8193, 8195, 8197, 8198, 8201, 8202, 8207, 8210, 8211, 8215, 8218, 8219, 8221, 8222, 8229, 8230, 8231, 8233, 8234, 8238, 8242, 8243, 8246, 8249, 8254, 8257, 8258, 8261, 8263, 8265, 8270, 8273, 8278, 8283, 8287, 8290, 8291, 8293, 8294, 8302, 8309, 8311, 8314, 8315, 8317, 8318, 8319, 8321, 8323, 8326, 8327, 8329, 8337, 8338, 8341, 8342, 8346, 8353, 8355, 8357, 8362, 8366, 8369, 8371, 8377, 8383, 8386, 8387, 8390, 8393, 8395, 8398, 8401, 8407, 8414, 8419, 8431, 8435, 8437, 8441, 8445, 8446, 8454, 8455, 8458, 8459, 8461, 8462, 8463, 8467, 8471, 8473, 8474, 8479, 8481, 8482, 8483, 8485, 8490, 8491, 8494, 8495, 8497, 8498, 8499, 8501, 8506, 8507, 8509, 8513, 8515, 8517, 8521, 8527, 8534, 8535, 8537, 8542, 8549, 8551, 8553, 8554, 8557, 8562, 8567, 8570, 8571, 8573, 8578, 8579, 8582, 8587, 8589, 8590, 8593, 8594, 8598, 8602, 8605, 8606, 8607, 8611, 8614, 8617, 8618, 8621, 8627, 8629, 8630, 8634, 8635, 8638, 8639, 8642, 8643, 8645, 8647, 8651, 8653, 8657, 8661, 8662, 8666, 8669, 8671, 8674, 8677, 8678, 8679, 8681, 8683, 8686, 8687, 8693, 8695, 8697, 8698, 8701, 8705, 8707, 8710, 8714, 8717, 8719, 8723, 8726, 8734, 8741, 8746, 8747, 8749, 8751, 8753, 8767, 8773, 8774, 8777, 8778, 8779, 8783, 8787, 8791, 8794, 8795, 8797, 8798, 8801, 8805, 8810, 8818, 8819, 8822, 8823, 8827, 8830, 8831, 8834, 8839, 8841, 8842, 8843, 8845, 8846, 8849, 8851, 8857, 8858, 8861, 8866, 8867, 8873, 8877, 8878, 8879, 8886, 8887, 8891, 8895, 8897, 8902, 8903, 8906, 8911, 8913, 8914, 8915, 8917, 8921, 8923, 8926, 8927, 8929, 8935, 8938, 8939, 8941, 8942, 8945, 8947, 8949, 8953, 8962, 8963, 8966, 8971, 8977, 8981, 8983, 8985, 8986, 8987, 8990, 9001, 9003, 9005, 9010, 9011, 9013, 9014, 9021, 9023, 9026, 9030, 9031, 9035, 9037, 9038, 9039, 9041, 9043, 9053, 9055, 9057, 9059, 9061, 9066, 9067, 9070, 9074, 9077, 9079, 9083, 9085, 9091, 9093, 9102, 9106, 9107, 9109, 9113, 9119, 9121, 9122, 9127, 9131, 9134, 9138, 9139, 9142, 9143, 9147, 9157, 9161, 9166, 9173, 9174, 9178, 9179, 9182, 9185, 9187, 9190, 9193, 9201, 9203, 9205, 9210, 9214, 9221, 9227, 9229, 9233, 9235, 9237, 9239, 9241, 9242, 9246, 9247, 9253, 9254, 9255, 9257, 9259, 9262, 9265, 9269, 9271, 9273, 9283, 9289, 9291, 9299, 9302, 9307, 9309, 9313, 9318, 9329, 9331, 9334, 9335, 9337, 9338, 9341, 9343, 9346, 9347, 9353, 9354,

	d
$T_3=1$	9358, 9361, 9362, 9363, 9365, 9367, 9371, 9373, 9374, 9377, 9383, 9385, 9390, 9391, 9395, 9398, 9399, 9401, 9403, 9406, 9407, 9415, 9417, 9418, 9421, 9422, 9434, 9435, 9439, 9442, 9446, 9453, 9461, 9462, 9466, 9469, 9470, 9473, 9478, 9481, 9482, 9485, 9487, 9490, 9491, 9493, 9497, 9498, 9502, 9503, 9505, 9509, 9511, 9515, 9518, 9529, 9533, 9534, 9535, 9539, 9541, 9542, 9547, 9553, 9554, 9557, 9561, 9566, 9569, 9571, 9574, 9577, 9579, 9581, 9587, 9593, 9595, 9597, 9598, 9599, 9601, 9605, 9607, 9613, 9614, 9617, 9622, 9623, 9626, 9629, 9631, 9637, 9638, 9641, 9642, 9643, 9646, 9647, 9651, 9655, 9658, 9661, 9662, 9665, 9667, 9670, 9671, 9673, 9674, 9677, 9678, 9682, 9683, 9685, 9686, 9687, 9694, 9695, 9697, 9698, 9701, 9703, 9706, 9707, 9709, 9713, 9715, 9719, 9723, 9730, 9731, 9733, 9737, 9739, 9741, 9742, 9743, 9746, 9755, 9758, 9759, 9767, 9770, 9773, 9781, 9782, 9786, 9787, 9791, 9793, 9806, 9809, 9818, 9821, 9829, 9831, 9835, 9838, 9839, 9841, 9842, 9847, 9851, 9853, 9857, 9858, 9859, 9862, 9863, 9866, 9877, 9878, 9881, 9883, 9885, 9887, 9889, 9894, 9899, 9901, 9903, 9911, 9917, 9919, 9923, 9931, 9934, 9935, 9938, 9943, 9946, 9953, 9955, 9957, 9959, 9961, 9962, 9965, 9966, 9967, 9970, 9973, 9974, 9977, 9979, 9983, 9986, 9989, 9991, 9994, 9997
$T_3=[3]$	6, 15, 33, 43, 51, 58, 62, 69, 77, 78, 82, 83, 85, 87, 93, 103, 106, 109, 113, 114, 131, 139, 142, 151, 159, 173, 177, 179, 181, 186, 199, 202, 213, 223, 229, 231, 235, 249, 253, 254, 267, 281, 285, 287, 295, 310, 318, 322, 323, 327, 330, 331, 337, 346, 347, 357, 366, 386, , 391, 393, 397, 401, 402, 406, 411, 418, 427, 429, 438, 443, 449, 454, 457, 461, 465, 469, 473, 483, 497, 501, 502, 505, 510, 515, 518, 533, 537, 546, 555, 563, 571, 573, 574, 581, 582, 591, 597, 606, 607, 609, , 618, 626, 627, 633, 635, 642, 645, 653, 659, 662, 663, 667, 679, 694, , 697, 699, 743, 745, 751, 753, 754, 761, 762, 771, 773, 785, 786, 787, 789, 790, 791, 798, 802, 807, 822, 834, 839, 843, 849, 851, 858, 865, 866, 870, 871, 879, 886, 887, 894, 895, 897, 898, 899, 921, 926, 929, 934, 935, 942, 951, 953, 965, 978, 979, 985, 987, 994, 997, 1002, 1005, 1010, 1023, 1034, 1041, 1043, 1059, 1074, 1077, 1090, 1091, 1101, 1102, 1103, 1110, 1113, 1114, 1118, 1126, 1137, 1149, 1153, 1157, 1158, 1162, 1171, 1181, 1185, 1191, 1194, 1195, 1211, 1217, 1221, 1222, 1229, 1230, 1237, 1241, 1249, 1261, 1266, 1277, 1283, 1290, 1293, 1294, 1295, 1297, 1298, 1299, 1302, 1307, 1317, 1318, 1329, 1333, 1338, 1342, 1345, 1347, 1353, 1365, 1373, 1385, 1397, 1399, 1406, 1410, 1415, 1419, 1437, 1454, 1455, 1462, 1463, 1473, 1482, 1486, 1489, 1491, 1495, 1497, 1498, 1499, 1501, 1522, 1523, 1529, 1545, 1555, 1563, 1567, 1578, 1579, 1581, 1585, 1590, 1595, 1603,

	d
$\mathcal{T}_3=[3]$	1609, 1619, 1626, 1627, 1635, 1639, 1642, 1645, 1646, 1649, 1653, 1662, 1663, 1669, 1670, 1671, 1685, 1689, 1695, 1698, 1699, 1707, 1726, 1727, 1735, 1738, 1743, 1745, 1753, 1758, 1765, 1769, 1770, 1771, 1779, 1787, 1793, 1795, 1810, 1834, 1838, 1842, 1847, 1858, 1869, 1870, 1878, 1897, 1903, 1907, 1921, 1929, 1934, 1937, 1941, 1945, 1954, 1957, 1965, 1973, 1982, 1983, 1986, 1987, 1993, 1994, 1995, 2005, 2010, 2013, 2015, 2019, 2022, 2026, 2027, 2029, 2030, 2031, 2035, 2037, 2042, 2045, 2046, 2067, 2074, 2078, 2083, 2085, 2089, 2101, 2103, 2114, 2118, 2121, 2122, 2123, 2126, 2129, 2130, 2143, 2146, 2154, 2155, 2157, 2158, 2167, 2170, 2177, 2185, 2190, 2193, 2194, 2202, 2207, 2210, 2211, 2213, 2215, 2219, 2238, 2251, 2253, 2255, 2265, 2270, 2274, 2281, 2283, 2285, 2298, 2301, 2314, 2318, 2321, 2326, 2329, 2330, 2333, 2337, 2346, 2354, 2363, 2369, 2371, 2373, 2382, 2387, 2390, 2391, 2409, 2411, 2413, 2419, 2427, 2429, 2431, 2438, 2441, 2442, 2451, 2453, 2454, 2459, 2463, 2469, 2505, 2510, 2515, 2517, 2522, 2526, 2530, 2539, 2543, 2549, 2553, 2555, 2557, 2561, 2562, 2570, 2571, 2573, 2579, 2598, 2607, 2609, 2623, 2627, 2630, 2634, 2635, 2638, 2643, 2657, 2661, 2663, 2666, 2670, 2677, 2679, 2694, 2703, 2705, 2706, 2707, 2713, 2715, 2719, 2721, 2733, 2735, 2737, 2739, 2742, 2751, 2755, 2758, 2766, 2767, 2769, 2770, 2789, 2791, 2814, 2819, 2821, 2823, 2831, 2841, 2847, 2855, 2857, 2859, 2867, 2877, 2886, 2895, 2902, 2903, 2921, 2926, 2929, 2931, 2941, 2942, 2949, 2955, 2958, 2962, 2967, 2971, 2981, 2987, 2993, 2995, 3001, 3003, 3005, 3010, 3011, 3014, 3030, 3035, 3039, 3041, 3047, 3053, 3054, 3057, 3062, 3067, 3071, 3093, 3094, 3099, 3111, 3129, 3130, 3142, 3155, 3158, 3163, 3165, 3166, 3173, 3183, 3190, 3199, 3201, 3207, 3209, 3210, 3219, 3221, 3226, 3229, 3235, 3241, 3242, 3246, 3255, 3261, 3270, 3273, 3274, 3277, 3281, 3287, 3290, 3297, 3305, 3307, 3309, 3318, 3323, 3326, 3337, 3338, 3353, 3354, 3355, 3363, 3371, 3383, 3394, 3397, 3399, 3405, 3417, 3423, 3426, 3435, 3437, 3441, 3442, 3449, 3453, 3461, 3462, 3467, 3469, 3470, 3478, 3482, 3486, 3490, 3493, 3498, 3502, 3507, 3514, 3517, 3522, 3534, 3543, 3558, 3561, 3569, 3570, 3571, 3574, 3590, 3594, 3597, 3602, 3615, 3633, 3637, 3641, 3642, 3647, 3651, 3657, 3662, 3670, 3674, 3687, 3693, 3701, 3702, 3705, 3706, 3709, 3713, 3722, 3723, 3727, 3737, 3745, 3755, 3759, 3777, 3781, 3787, 3795, 3799, 3801, 3803, 3806, 3813, 3826, 3831, 3842, 3846, 3847, 3855, 3858, 3859, 3863, 3869, 3873, 3877, 3881, 3885, 3889, 3891, 3894,

	d
$\mathcal{T}_3=[3]$	3898, 3899, 3903, 3911, 3921, 3922, 3927, 3930, 3931, 3937, 3939, 3945, 3963, 3965, 3966, 3967, 3970, 3983, 3990, 3997, 4001, 4002, 4029, 4034, 4037, 4038, 4047, 4053, 4055, 4061, 4073, 4074, 4078, 4079, 4083, 4087, 4089, 4098, 4099, 4103, 4106, 4119, 4141, 4145, 4146, 4155, 4163, 4169, 4171, 4177, 4182, 4191, 4193, 4202, 4207, 4209, 4210, 4215, 4217, 4219, 4222, 4237, 4238, 4245, 4247, 4254, 4265, 4286, 4290, 4306, 4310, 4315, 4317, 4319, 4326, 4339, 4345, 4349, 4355, 4366, 4367, 4371, 4382, 4389, 4398, 4399, 4407, 4447, 4462, 4463, 4465, 4469, 4470, 4471, 4478, 4479, 4481, 4486, 4497, 4498, 4503, 4506, 4507, 4511, 4515, 4519, 4529, 4533, 4542, 4551, 4553, 4558, 4569, 4578, 4597, 4603, 4605, 4613, 4614, 4646, 4647, 4649, 4654, 4659, 4670, 4674, 4677, 4681, 4682, 4686, 4687, 4695, 4699, 4701, 4706, 4711, 4713, 4721, 4742, 4745, 4754, 4755, 4765, 4766, 4767, 4771, 4783, 4785, 4789, 4803, 4809, 4817, 4821, 4830, 4831, 4837, 4838, 4839, 4841, 4845, 4846, 4853, 4854, 4863, 4865, 4866, 4867, 4870, 4886, 4889, 4893, 4903, 4907, 4911, 4915, 4929, 4933, 4934, 4938, 4945, 4947, 4965, 4970, 4982, 4985, 4994, 4997, 5001, 5005, 5011, 5018, 5019, 5026, 5029, 5037, 5039, 5042, 5053, 5055, 5059, 5061, 5063, 5081, 5083, 5089, 5091, 5099, 5102, 5113, 5118, 5123, 5127, 5131, 5134, 5137, 5141, 5143, 5149, 5154, 5161, 5163, 5173, 5177, 5181, 5182, 5183, 5185, 5186, 5187, 5189, 5190, 5199, 5206, 5207, 5210, 5217, 5218, 5221, 5230, 5234, 5235, 5249, 5255, 5261, 5262, 5263, 5271, 5277, 5289, 5297, 5298, 5307, 5309, 5331, 5333, 5334, 5339, 5343, 5347, 5351, 5353, 5361, 5365, 5370, 5379, 5381, 5383, 5386, 5397, 5406, 5407, 5419, 5421, 5422, 5431, 5437, 5438, 5441, 5442, 5451, 5453, 5455, 5458, 5469, 5471, 5478, 5487, 5494, 5497, 5502, 5503, 5505, 5506, 5510, 5522, 5523, 5527, 5529, 5530, 5541, 5557, 5558, 5559, 5567, 5578, 5579, 5599, 5609, 5617, 5619, 5621, 5622, 5629, 5637, 5642, 5646, 5649, 5666, 5669, 5674, 5681, 5683, 5694, 5698, 5702, 5703, 5719, 5721, 5730, 5734, 5738, 5739, 5745, 5749, 5761, 5781, 5791, 5798, 5799, 5801, 5802, 5803, 5810, 5815, 5821, 5838, 5843, 5861, 5865, 5870, 5874, 5883, 5898, 5902, 5910, 5918, 5930, 5933, 5934, 5937, 5938, 5941, 5946, 5955, 5970, 5981, 5997, 6001, 6009, 6011, 6017, 6018, 6029, 6031, 6038, 6042, 6047, 6053, 6055, 6058, 6061, 6063, 6081, 6082, 6090, 6091, 6094, 6114, 6117, 6133, 6135, 6151, 6159, 6166, 6167, 6169, 6186, 6187, 6193, 6195, 6198, 6202, 6207, 6217, 6218, 6234, 6238, 6242, 6258, 6261, 6265, 6270, 6271, 6277, 6279, 6286, 6289, 6294,

	d
$\mathcal{T}_3=[3]$	6295, 6297, 6306, 6307, 6310, 6311, 6315, 6326, 6334, 6342, 6351, 6355, 6359, 6366, 6369, 6374, 6385, 6401, 6403, 6405, 6427, 6430, 6441, 6451, 6459, 6461, 6465, 6477, 6478, 6482, 6483, 6490, 6494, 6499, 6501, 6502, 6514, 6522, 6530, 6547, 6571, 6585, 6593, 6601, 6621, 6623, 6626, 6630, 6663, 6666, 6667, 6670, 6685, 6686, 6691, 6702, 6703, 6707, 6711, 6719, 6729, 6730, 6731, 6737, 6747, 6758, 6761, 6765, 6766, 6770, 6771, 6774, 6782, 6783, 6785, 6797, 6798, 6799, 6801, 6806, 6807, 6835, 6837, 6846, 6854, 6855, 6863, 6869, 6871, 6882, 6887, 6890, 6891, 6899, 6901, 6907, 6913, 6915, 6918, 6934, 6938, 6945, 6949, 6954, 6965, 6977, 6979, 6981, 6985, 6995, 6997, 6999, 7014, 7017, 7019, 7023, 7026, 7035, 7051, 7055, 7057, 7058, 7061, 7062, 7066, 7071, 7087, 7089, 7091, 7094, 7103, 7109, 7115, 7117, 7118, 7126, 7133, 7134, 7142, 7143, 7157, 7161, 7169, 7170, 7183, 7187, 7189, 7193, 7198, 7201, 7210, 7229, 7231, 7233, 7234, 7235, 7239, 7247, 7251, 7259, 7262, 7270, 7273, 7278, 7294, 7303, 7307, 7309, 7314, 7315, 7319, 7321, 7323, 7329, 7349, 7355, 7369, 7370, 7374, 7377, 7383, 7386, 7387, 7393, 7395, 7403, 7413, 7418, 7422, 7423, 7431, 7437, 7445, 7451, 7453, 7455, 7466, 7469, 7471, 7473, 7474, 7485, 7487, 7495, 7503, 7509, 7513, 7521, 7522, 7530, 7537, 7539, 7543, 7545, 7554, 7557, 7559, 7567, 7582, 7590, 7591, 7593, 7598, 7601, 7602, 7603, 7607, 7610, 7611, 7619, 7621, 7629, 7633, 7634, 7639, 7643, 7647, 7649, 7658, 7663, 7666, 7671, 7673, 7678, 7689, 7690, 7691, 7694, 7698, 7701, 7702, 7703, 7705, 7709, 7710, 7721, 7737, 7743, 7746, 7747, 7755, 7757, 7769, 7779, 7797, 7802, 7818, 7827, 7829, 7831, 7835, 7845, 7846, 7863, 7870, 7878, 7879, 7883, 7886, 7887, 7890, 7897, 7899, 7905, 7906, 7910, 7917, 7919, 7930, 7939, 7953, 7957, 7958, 7961, 7962, 7978, 7981, 7989, 7994, 7998, 7999, 8003, 8005, 8011, 8017, 8018, 8026, 8027, 8029, 8030, 8034, 8041, 8043, 8051, 8057, 8066, 8067, 8070, 8071, 8078, 8090, 8094, 8095, 8097, 8099, 8101, 8102, 8103, 8105, 8106, 8110, 8133, 8137, 8142, 8151, 8155, 8158, 8169, 8171, 8173, 8178, 8194, 8203, 8206, 8209, 8213, 8223, 8227, 8237, 8245, 8251, 8255, 8266, 8267, 8274, 8282, 8285, 8295, 8297, 8299, 8301, 8305, 8306, 8322, 8331, 8333, 8345, 8354, 8358, 8359, 8363, 8365, 8373, 8382, 8385, 8394, 8402, 8409, 8411, 8417, 8418, 8422, 8426, 8429, 8430, 8434, 8439, 8447, 8449, 8453, 8489, 8493, 8502, 8503, 8510, 8511,

	d
$\mathcal{T}_3=[3]$	8518, 8519, 8522, 8529, 8530, 8533, 8539, 8545, 8546, 8558, 8565, 8566, 8569, 8583, 8597, 8599, 8601, 8603, 8615, 8626, 8633, 8641, 8654, 8663, 8682, 8689, 8690, 8691, 8706, 8709, 8711, 8715, 8718, 8729, 8731, 8733, 8738, 8742, 8743, 8755, 8758, 8759, 8762, 8765, 8769, 8770, 8781, 8782, 8786, 8789, 8799, 8803, 8806, 8807, 8814, 8815, 8817, 8826, 8837, 8853, 8854, 8855, 8871, 8881, 8885, 8889, 8890, 8893, 8894, 8898, 8905, 8907, 8933, 8934, 8943, 8961, 8970, 8979, 8989, 8995, 8998, 8999, 9006, 9015, 9017, 9019, 9029, 9033, 9034, 9042, 9046, 9047, 9049, 9051, 9058, 9069, 9073, 9078, 9082, 9086, 9089, 9094, 9095, 9097, 9098, 9101, 9103, 9105, 9110, 9118, 9123, 9129, 9130, 9137, 9141, 9145, 9149, 9151, 9154, 9155, 9158, 9159, 9167, 9169, 9170, 9177, 9183, 9191, 9197, 9199, 9202, 9206, 9211, 9215, 9218, 9219, 9222, 9223, 9226, 9230, 9231, 9238, 9249, 9263, 9267, 9277, 9278, 9282, 9285, 9287, 9293, 9301, 9305, 9311, 9314, 9319, 9321, 9322, 9330, 9339, 9345, 9349, 9355, 9366, 9370, 9379, 9381, 9382, 9413, 9419, 9426, 9427, 9430, 9431, 9445, 9449, 9454, 9458, 9467, 9471, 9474, 9479, 9489, 9494, 9499, 9501, 9507, 9510, 9514, 9517, 9519, 9521, 9523, 9526, 9530, 9538, 9543, 9545, 9546, 9551, 9562, 9563, 9565, 9570, 9573, 9586, 9590, 9602, 9609, 9611, 9615, 9635, 9645, 9663, 9669, 9681, 9689, 9690, 9705, 9710, 9714, 9721, 9722, 9726, 9727, 9735, 9753, 9757, 9762, 9763, 9766, 9769, 9771, 9778, 9779, 9785, 9789, 9794, 9797, 9798, 9803, 9807, 9815, 9817, 9822, 9823, 9827, 9830, 9833, 9834, 9845, 9861, 9867, 9869, 9871, 9874, 9886, 9890, 9893, 9902, 9905, 9907, 9910, 9913, 9914, 9915, 9921, 9930, 9933, 9937, 9939, 9941, 9942, 9949, 9969, 9978, 9985, 9987, 9993, 9995

	d
$\mathcal{T}_3=[3,3]$	717, 1383, 1714, 1887, 1901, 2229, 2230, 2263, 2445, 2787, 2913, 3667, 3678, 3714, 3786, 4094, 4151, 4299, 4722, 4910, 4983, 5667, 5811, 5901, 5982, 6162, 6185, 6243, 6414, 6515, 6657, 6873, 6963, 6990, 7269, 7310, 7311, 7655, 7726, 8079, 8241, 8457, 9062, 9258, 9357, 9447, 9618, 9790, 9897, 9926
$\mathcal{T}_3=[9]$	29, 42, 67, 74, 79, 137, 141, 182, 183, 195, 222, 238, 251, 258, 271, 303, 314, 321, 326, 353, 359, 417, 447, 471, 479, 494, 506, 521, 611, 638, 647, 654, 674, 690, 723, 727, 731, 741, 767, 782, 806, 831, 842, 861, 874, 877, 878, 906, 933, 969, 993, 1006, 1009, 1013, 1027, 1031, 1046, 1051, 1086, 1117, 1122, 1129, 1135, 1139, 1165, 1167, 1223, 1238, 1239, 1246, 1258, 1311, 1322, 1367, 1374, 1401, 1429, 1430, 1433, 1446, 1477, 1478, 1479, 1507, 1509, 1527, 1541, 1554, 1654, 1655, 1678, 1691, 1781, 1806, 1811, 1830, 1833, 1855, 1894, 1910, 1914, 1946, 1951, 1959, 1977, 2006, 2021, 2049, 2055, 2059, 2094, 2137, 2139, 2161, 2186, 2201, 2221, 2246, 2247, 2266, 2267, 2319, 2355, 2374, 2405, 2406, 2410, 2418, 2470, 2473, 2478, 2481, 2490, 2518, 2521, 2554, 2587, 2593, 2611, 2629, 2649, 2658, 2678, 2697, 2714, 2726, 2743, 2753, 2759, 2771, 2777, 2778, 2794, 2801, 2805, 2807, 2822, 2833, 2885, 2894, 2910, 2915, 2919, 2947, 2951, 2985, 2986, 2994, 3007, 3059, 3066, 3082, 3090, 3102, 3119, 3126, 3138, 3147, 3157, 3187, 3194, 3205, 3237, 3254, 3282, 3311, 3327, 3345, 3414, 3419, 3422, 3446, 3454, 3471, 3527, 3531, 3551, 3579, 3621, 3665, 3669, 3677, 3685, 3719, 3739, 3741, 3765, 3769, 3774, 3778, 3791, 3830, 3849, 3853, 3895, 3941, 3955, 3957, 3958, 3962, 3973, 3979, 3981, 4007, 4011, 4021, 4031, 4065, 4081, 4093, 4101, 4110, 4137, 4142, 4162, 4197, 4211, 4226, 4269, 4281, 4283, 4285, 4295, 4297, 4301, 4346, 4353, 4362, 4391, 4402, 4406, 4409, 4411, 4434, 4443, 4451, 4453, 4493, 4513, 4526, 4534, 4535, 4537, 4555, 4587, 4594, 4615, 4641, 4642, 4643, 4651, 4657, 4667, 4718, 4727, 4731, 4737, 4741, 4749, 4758, 4823, 4826, 4855, 4939, 4954, 4963, 4966, 4973, 5010, 5062, 5095, 5098, 5109, 5110, 5114, 5178, 5179, 5237, 5266, 5285, 5286, 5291, 5303, 5327, 5369, 5405, 5411, 5434, 5461, 5477, 5513, 5521, 5533, 5542, 5595, 5611, 5613, 5623, 5631, 5647, 5658, 5659, 5682, 5722, 5741, 5786, 5822, 5846, 5847, 5853, 5858, 5878, 5889, 5897, 5905, 5951, 5954, 5971, 5973, 5991, 6043, 6045, 6054, 6126, 6141, 6199, 6209, 6213, 6283, 6305, 6333, 6335, 6338, 6387, 6394, 6421, 6486, 6495, 6505, 6506, 6513, 6531, 6594, 6602, 6610, 6631, 6637, 6639, 6693, 6739, 6746, 6751, 6754, 6769, 6790, 6791, 6794, 6809, 6810, 6817, 6819, 6830, 6834, 6847, 6922, 6927, 6943, 7031, 7053, 7097, 7107, 7190, 7206, 7215, 7226, 7246, 7253, 7279, 7295, 7305, 7341, 7357, 7359, 7411, 7415, 7429, 7449, 7458, 7478, 7494, 7566, 7573, 7574, 7583, 7630, 7635, 7638, 7642, 7665, 7699, 7711, 7745, 7753, 7798, 7809, 7813, 7822, 7858, 7873, 7891, 7926, 7933, 7937, 7941, 7951,

	d
$\mathcal{T}_3=[9]$	7955, 7959, 7969, 7971, 7985, 7991, 7997, 8007, 8033, 8069, 8093, 8098, 8111, 8113, 8114, 8115, 8130, 8170, 8187, 8205, 8239, 8259, 8269, 8277, 8279, 8286, 8367, 8389, 8399, 8403, 8421, 8423, 8438, 8443, 8486, 8531, 8538, 8547, 8561, 8563, 8574, 8581, 8585, 8609, 8610, 8637, 8646, 8655, 8659, 8699, 8737, 8763, 8785, 8813, 8835, 8859, 8863, 8870, 8882, 8899, 8909, 8931, 8951, 8958, 8965, 9002, 9007, 9022, 9071, 9087, 9111, 9115, 9133, 9186, 9194, 9209, 9213, 9217, 9266, 9281, 9286, 9290, 9294, 9298, 9303, 9323, 9326, 9327, 9389, 9393, 9394, 9397, 9402, 9410, 9411, 9429, 9433, 9437, 9443, 9451, 9455, 9463, 9465, 9582, 9589, 9591, 9606, 9619, 9649, 9654, 9691, 9699, 9717, 9718, 9734, 9749, 9795, 9805, 9813, 9865, 9870, 9879, 9895, 9906, 9929, 9958
$\mathcal{T}_3=[3,9]$	2659, 2917, 2922, 3023, 3291, 3867, 4227, 4279, 4778, 4974, 5073, 5253, 5919, 6378, 6567, 6738, 7006, 7773, 7954, 8061, 8374, 8713, 9578, 9998
$\mathcal{T}_3 = [27]$	105, 247, 257, 339, 354, 410, 431, 511, 519, 599, 610, 634, 681, 683, 730, 733, 854, 1131, 1142, 1203, 1257, 1319, 1330, 1339, 1390, 1453, 1511, 1518, 1546, 1641, 1761, 1841, 1851, 1865, 1866, 1871, 1882, 1905, 1966, 2099, 2110, 2149, 2233, 2278, 2310, 2339, 2423, 2495, 2519, 2589, 2614, 2711, 2747, 2914, 2918, 3021, 3137, 3390, 3410, 3451, 3485, 3606, 3619, 3666, 3673, 3934, 3989, 4126, 4159, 4173, 4199, 4294, 4427, 4461, 4618, 4623, 4661, 4822, 4857, 4902, 4927, 4969, 5111, 5302, 5321, 5429, 5433, 5479, 5511, 5639, 5685, 5690, 5714, 5903, 5979, 6026, 6051, 6099, 6146, 6153, 6302, 6323, 6398, 6407, 6423, 6431, 6535, 6555, 6562, 6563, 6565, 6573, 6603, 6658, 6681, 6722, 6951, 6955, 7078, 7177, 7214, 7367, 7414, 7417, 7441, 7446, 7459, 7674, 7679, 7719, 7770, 7782, 7854, 7881, 7903, 8139, 8247, 8335, 8339, 8347, 8378, 8413, 8465, 8555, 8623, 8702, 8727, 8754, 8790, 8809, 8821, 8922, 8930, 8969, 8974, 8994, 8997, 9165, 9181, 9483, 9527, 9627, 9659, 9745, 9754, 9777, 9799, 9811, 9814, 9843, 9854, 9951
$\mathcal{T}_3 = [81]$	122, 123, 206, 719, 915, 3391, 6189, 6549, 6558, 7481, 9195, 9634
$\mathcal{T}_3 = [3, 81]$	5793, 6559, 7179.
$\mathcal{T}_3 = [243]$	1095, 1867, 1923, 5515, 7242, 7249, 7462, 8665, 8735, 9676.
$\mathcal{T}_3 = [729]$	1213, 5226,
$\mathcal{T}_3 = [2187]$	474,

	d
$\mathcal{T}_5 = 1$	2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 19, 21, 22, 23, 26, 29, 30, 31, 33, 34, 35, 37, 41, 43, 46, 47, 55, 57, 58, 59, 61, 65, 66, 67, 71, 74, 77, 78, 79, 83, 85, 86, 87, 91, 93, 94, 95, 97, 101, 102, 103, 105, 106, 110, 111, 113, 118, 119, 122, 123, 129, 131, 133, 137, 138, 141, 142, 145, 146, 149, 151, 154, 157, 158, 159, 163, 165, 166, 167, 170, 173, 174, 177, 178, 179, 181, 182, 187, 190, 193, 194, 195, 197, 199, 201, 203, 205, 206, 209, 210, 213, 215, 218, 219, 221, 222, 223, 226, 227, 229, 230, 231, 233, 235, 237, 239, 246, 247, 249, 251, 253, 254, 255, 258, 262, 263, 265, 266, 267, 269, 273, 274, 277, 281, 282, 283, 285, 286, 290, 291, 293, 299, 301, 302, 303, 305, 307, 309, 310, 311, 313, 317, 318, 319, 321, 322, 323, 327, 329, 330, 331, 334, 335, 337, 339, 341, 345, 346, 347, 349, 353, 354, 355, 357, 358, 359, 362, 365, 367, 370, 371, 373, 374, 377, 379, 381, 383, 385, 386, 389, 390, 391, 393, 394, 395, 397, 398, 399, 402, 403, 406, 409, 410, 411, 413, 415, 417, 418, 419, 421, 429, 431, 435, 437, 438, 442, 443, 445, 446, 447, 449, 451, 454, 455, 458, 461, 462, 463, 465, 469, 470, 471, 474, 478, 479, 481, 482, 483, 485, 487, 491, 493, 494, 498, 503, 505, 506, 510, 511, 515, 517, 518, 521, 527, 530, 533, 535, 538, 542, 545, 546, 547, 551, 553, 554, 555, 557, 559, 561, 562, 563, 565, 566, 569, 570, 571, 573, 577, 579, 582, 583, 586, 590, 591, 593, 595, 598, 599, 601, 607, 609, 610, 611, 613, 614, 618, 619, 631, 633, 638, 641, 642, 643, 646, 647, 649, 651, 653, 654, 655, 658, 659, 661, 663, 665, 667, 669, 670, 671, 677, 678, 679, 681, 682, 683, 685, 689, 690, 691, 694, 695, 697, 698, 701, 703, 705, 706, 707, 709, 710, 713, 714, 715, 717, 718, 721, 723, 730, 731, 733, 737, 739, 741, 742, 743, 746, 749, 751, 754, 755, 757, 758, 759, 762, 763, 766, 769, 770, 771, 773, 777, 778, 779, 781, 782, 785, 786, 787, 790, 793, 794, 797, 799, 802, 803, 805, 806, 807, 809, 811, 813, 814, 815, 818, 821, 822, 823, 826, 827, 829, 830, 831, 834, 835, 838, 839, 842, 843, 849, 851, 853, 854, 858, 859, 861, 862, 863, 865, 866, 870, 871, 877, 878, 879, 883, 885, 886, 887, 889, 890, 894, 895, 897, 898, 899, 901, 902, 903, 905, 906, 907, 910, 911, 913, 914, 915, 917, 919, 921, 926, 929, 930, 934, 937, 938, 939, 941, 942, 946, 949, 951, 953, 957, 958, 959, 962, 965, 967, 969, 970, 971, 973, 974, 977, 979, 985, 986, 987, 989, 991, 993, 994, 997, 998, 1001, 1002, 1003, 1005, 1006, 1007, 1009, 1010, 1011, 1013, 1015, 1018, 1019, 1021, 1022, 1023, 1027, 1030, 1033, 1034, 1037, 1038, 1039, 1043, 1045, 1046, 1047, 1049, 1054, 1055, 1057, 1059, 1061, 1063, 1066, 1067, 1069, 1070, 1073, 1077, 1081, 1082, 1085, 1090, 1091, 1094, 1095, 1097, 1099, 1101, 1102, 1103, 1105, 1106, 1109, 1114, 1117, 1119, 1121, 1122, 1123, 1129, 1130, 1131, 1138, 1139, 1141, 1142,
$\mathcal{T}_5 = 1$	

	d
$\mathcal{T}_5 = 1$	1145, 1146, 1147, 1149, 1151, 1153, 1154, 1155, 1158, 1159, 1162, 1163, 1165, 1166, 1167, 1169, 1171, 1174, 1177, 1178, 1181, 1186, 1189, 1190, 1193, 1195, 1198, 1199, 1201, 1202, 1203, 1205, 1207, 1209, 1211, 1217, 1218, 1219, 1221, 1222, 1223, 1227, 1229, 1230, 1234, 1235, 1237, 1239, 1241, 1245, 1246, 1249, 1253, 1254, 1255, 1257, 1258, 1259, 1263, 1266, 1270, 1271, 1273, 1277, 1282, 1283, 1286, 1290, 1291, 1294, 1295, 1297, 1298, 1299, 1302, 1303, 1306, 1307, 1309, 1310, 1311, 1315, 1318, 1319, 1322, 1326, 1329, 1330, 1333, 1334, 1337, 1342, 1343, 1345, 1346, 1347, 1349, 1353, 1354, 1355, 1357, 1358, 1361, 1362, 1363, 1365, 1367, 1370, 1371, 1373, 1374, 1378, 1379, 1381, 1383, 1385, 1387, 1390, 1391, 1394, 1397, 1399, 1401, 1403, 1409, 1411, 1414, 1415, 1417, 1418, 1419, 1423, 1430, 1433, 1435, 1437, 1438, 1439, 1442, 1446, 1447, 1451, 1453, 1454, 1455, 1457, 1459, 1462, 1463, 1466, 1469, 1471, 1473, 1474, 1477, 1478, 1481, 1482, 1483, 1487, 1489, 1491, 1495, 1497, 1498, 1499, 1501, 1502, 1505, 1506, 1507, 1509, 1510, 1511, 1513, 1514, 1515, 1517, 1522, 1523, 1526, 1527, 1533, 1534, 1537, 1538, 1541, 1542, 1543, 1545, 1546, 1547, 1549, 1551, 1553, 1554, 1555, 1558, 1559, 1561, 1562, 1563, 1567, 1569, 1570, 1571, 1574, 1578, 1579, 1581, 1582, 1583, 1585, 1589, 1590, 1591, 1594, 1595, 1598, 1599, 1601, 1603, 1605, 1606, 1607, 1609, 1610, 1613, 1614, 1615, 1618, 1619, 1622, 1623, 1626, 1627, 1630, 1634, 1635, 1639, 1642, 1643, 1645, 1646, 1649, 1651, 1653, 1654, 1655, 1657, 1659, 1661, 1667, 1669, 1670, 1671, 1673, 1677, 1678, 1679, 1685, 1687, 1689, 1691, 1693, 1695, 1697, 1698, 1703, 1705, 1706, 1707, 1709, 1711, 1714, 1718, 1721, 1722, 1726, 1727, 1729, 1730, 1733, 1739, 1742, 1743, 1745, 1747, 1749, 1751, 1753, 1757, 1759, 1763, 1765, 1767, 1769, 1770, 1771, 1774, 1778, 1779, 1781, 1783, 1785, 1787, 1789, 1793, 1794, 1795, 1799, 1801, 1802, 1806, 1807, 1810, 1811, 1814, 1819, 1821, 1822, 1823, 1826, 1830, 1831, 1833, 1835, 1837, 1839, 1841, 1842, 1843, 1846, 1847, 1855, 1857, 1858, 1865, 1866, 1867, 1869, 1870, 1871, 1873, 1877, 1878, 1879, 1882, 1883, 1885, 1886, 1887, 1889, 1893, 1894, 1895, 1901, 1902, 1903, 1905, 1906, 1909, 1910, 1915, 1918, 1919, 1923, 1927, 1929, 1930, 1931, 1933, 1934, 1937, 1939, 1941, 1942, 1945, 1946, 1947, 1949, 1951, 1954, 1957, 1958, 1961, 1963, 1965, 1967, 1970, 1973, 1974, 1977, 1978, 1979, 1981, 1983, 1985, 1987, 1991, 1993, 1994, 1995, 1997, 2001, 2005, 2006, 2010, 2011, 2013, 2015, 2017, 2018, 2019, 2021, 2022, 2026, 2029, 2030, 2035, 2037, 2039, 2041, 2042, 2045, 2046, 2047, 2049, 2051, 2053, 2054, 2055, 2059, 2062, 2063, 2065, 2066, 2067, 2069, 2071,

	d
$\mathcal{T}_5 = 1$	2073, 2074, 2077, 2078, 2082, 2085, 2086, 2087, 2089, 2090, 2091, 2093, 2094, 2095, 2098, 2099, 2102, 2103, 2105, 2109, 2110, 2113, 2114, 2117, 2118, 2121, 2123, 2126, 2127, 2129, 2131, 2134, 2137, 2138, 2139, 2141, 2143, 2145, 2146, 2147, 2149, 2154, 2155, 2159, 2161, 2162, 2163, 2165, 2167, 2170, 2173, 2174, 2177, 2179, 2181, 2182, 2183, 2185, 2186, 2191, 2193, 2194, 2195, 2198, 2199, 2201, 2202, 2203, 2206, 2207, 2210, 2211, 2213, 2215, 2217, 2218, 2219, 2221, 2222, 2226, 2227, 2229, 2231, 2233, 2235, 2237, 2238, 2239, 2242, 2245, 2246, 2247, 2249, 2251, 2253, 2255, 2258, 2261, 2265, 2266, 2267, 2269, 2270, 2271, 2273, 2274, 2278, 2281, 2282, 2283, 2289, 2291, 2293, 2294, 2297, 2298, 2301, 2302, 2305, 2306, 2309, 2310, 2311, 2314, 2315, 2317, 2318, 2319, 2321, 2327, 2329, 2330, 2333, 2337, 2338, 2339, 2341, 2343, 2346, 2347, 2351, 2353, 2354, 2357, 2361, 2363, 2365, 2369, 2370, 2371, 2373, 2374, 2377, 2378, 2379, 2381, 2382, 2383, 2387, 2389, 2390, 2393, 2398, 2402, 2405, 2407, 2409, 2410, 2413, 2414, 2415, 2417, 2418, 2419, 2422, 2423, 2426, 2427, 2429, 2431, 2433, 2434, 2435, 2437, 2441, 2442, 2443, 2445, 2446, 2447, 2449, 2451, 2453, 2454, 2455, 2458, 2461, 2462, 2463, 2465, 2467, 2469, 2470, 2473, 2474, 2477, 2478, 2479, 2481, 2482, 2483, 2485, 2486, 2487, 2489, 2491, 2494, 2497, 2506, 2507, 2509, 2514, 2515, 2517, 2518, 2519, 2521, 2526, 2530, 2531, 2534, 2537, 2539, 2542, 2543, 2549, 2551, 2553, 2554, 2555, 2559, 2561, 2562, 2563, 2567, 2569, 2570, 2581, 2582, 2585, 2586, 2587, 2589, 2590, 2591, 2593, 2594, 2595, 2598, 2603, 2605, 2606, 2607, 2611, 2613, 2614, 2615, 2617, 2618, 2621, 2622, 2623, 2626, 2627, 2629, 2630, 2631, 2633, 2635, 2638, 2639, 2641, 2642, 2643, 2647, 2649, 2651, 2653, 2658, 2659, 2663, 2665, 2666, 2669, 2670, 2674, 2677, 2678, 2679, 2681, 2685, 2686, 2689, 2690, 2693, 2697, 2699, 2701, 2702, 2703, 2705, 2706, 2707, 2710, 2711, 2713, 2714, 2715, 2717, 2719, 2721, 2722, 2726, 2729, 2730, 2733, 2734, 2735, 2737, 2742, 2747, 2749, 2751, 2753, 2755, 2757, 2758, 2759, 2761, 2762, 2765, 2766, 2767, 2769, 2771, 2773, 2774, 2777, 2778, 2779, 2782, 2785, 2786, 2787, 2789, 2791, 2794, 2797, 2798, 2801, 2802, 2805, 2806, 2807, 2810, 2811, 2813, 2814, 2815, 2818, 2819, 2821, 2823, 2827, 2830, 2831, 2833, 2834, 2837, 2838, 2839, 2841, 2845, 2846, 2847, 2849, 2854, 2855, 2857, 2858, 2859, 2861, 2863, 2865, 2866, 2867, 2869, 2874, 2879, 2881, 2882, 2887, 2893, 2894, 2895, 2897, 2899, 2901, 2902, 2903, 2906, 2909, 2910, 2913, 2914, 2915, 2917, 2918, 2919, 2921, 2922, 2926, 2927, 2929, 2930, 2933, 2937, 2938, 2939, 2941, 2942, 2945, 2946, 2947, 2949, 2951, 2953, 2954, 2957, 2958,

	d
$\mathcal{T}_5 = 1$	2959, 2962, 2963, 2965, 2967, 2969, 2971, 2974, 2977, 2978, 2981, 2982, 2985, 2987, 2990, 2995, 2998, 2999, 3001, 3002, 3003, 3005, 3007, 3009, 3010, 3011, 3013, 3014, 3017, 3018, 3019, 3021, 3022, 3023, 3026, 3027, 3029, 3030, 3031, 3034, 3035, 3037, 3043, 3045, 3046, 3047, 3049, 3053, 3057, 3058, 3061, 3062, 3063, 3065, 3066, 3067, 3070, 3071, 3073, 3074, 3079, 3081, 3083, 3085, 3086, 3089, 3090, 3091, 3093, 3094, 3095, 3097, 3098, 3099, 3102, 3103, 3106, 3107, 3109, 3110, 3113, 3115, 3117, 3118, 3119, 3122, 3126, 3127, 3131, 3133, 3135, 3137, 3139, 3142, 3143, 3147, 3149, 3151, 3153, 3154, 3157, 3158, 3161, 3162, 3163, 3167, 3170, 3171, 3173, 3178, 3187, 3189, 3190, 3191, 3197, 3198, 3199, 3201, 3203, 3205, 3207, 3209, 3210, 3214, 3217, 3218, 3219, 3221, 3223, 3227, 3229, 3230, 3233, 3235, 3237, 3239, 3241, 3242, 3243, 3245, 3247, 3254, 3255, 3257, 3259, 3261, 3262, 3263, 3265, 3266, 3271, 3273, 3274, 3278, 3279, 3282, 3286, 3287, 3290, 3291, 3293, 3295, 3298, 3301, 3302, 3305, 3306, 3309, 3310, 3313, 3314, 3315, 3317, 3318, 3319, 3326, 3327, 3329, 3331, 3333, 3334, 3335, 3338, 3341, 3342, 3343, 3345, 3346, 3351, 3353, 3354, 3355, 3358, 3359, 3361, 3363, 3365, 3367, 3370, 3371, 3373, 3377, 3382, 3383, 3385, 3386, 3387, 3389, 3394, 3397, 3399, 3401, 3406, 3407, 3410, 3414, 3418, 3419, 3421, 3422, 3423, 3426, 3427, 3431, 3433, 3434, 3435, 3437, 3439, 3441, 3442, 3443, 3446, 3449, 3454, 3455, 3457, 3458, 3459, 3461, 3462, 3463, 3466, 3467, 3470, 3473, 3477, 3478, 3485, 3486, 3487, 3489, 3490, 3491, 3493, 3494, 3495, 3498, 3502, 3503, 3505, 3511, 3513, 3514, 3515, 3517, 3518, 3521, 3522, 3523, 3527, 3529, 3530, 3531, 3533, 3534, 3535, 3538, 3539, 3542, 3545, 3547, 3551, 3553, 3557, 3558, 3559, 3561, 3562, 3563, 3565, 3566, 3567, 3570, 3571, 3578, 3579, 3581, 3583, 3586, 3587, 3589, 3590, 3594, 3595, 3597, 3602, 3603, 3605, 3606, 3607, 3611, 3613, 3614, 3615, 3617, 3619, 3621, 3622, 3623, 3629, 3631, 3633, 3634, 3635, 3637, 3638, 3641, 3646, 3647, 3649, 3651, 3655, 3657, 3658, 3659, 3662, 3665, 3667, 3669, 3671, 3674, 3677, 3678, 3679, 3682, 3683, 3685, 3686, 3689, 3693, 3695, 3701, 3702, 3706, 3707, 3710, 3711, 3714, 3719, 3723, 3727, 3729, 3730, 3731, 3733, 3734, 3737, 3738, 3739, 3741, 3742, 3745, 3746, 3747, 3749, 3754, 3755, 3758, 3759, 3761, 3763, 3766, 3767, 3769, 3774, 3777, 3778, 3779, 3781, 3785, 3787, 3791, 3793, 3794, 3797, 3801, 3802, 3803, 3805, 3806, 3809, 3810, 3811, 3813, 3817, 3818, 3819, 3821, 3823, 3826, 3827, 3831, 3833, 3835, 3837, 3838, 3839, 3841, 3842, 3845, 3846, 3847, 3849, 3851, 3853, 3854, 3855, 3857, 3858, 3859, 3862, 3865, 3867, 3869, 3873, 3874, 3877, 3881, 3882,

	d
$\mathcal{T}_5 = 1$	3883, 3885, 3886, 3889, 3890, 3891, 3893, 3894, 3895, 3899, 3901, 3903, 3909, 3910, 3913, 3914, 3917, 3918, 3921, 3922, 3923, 3926, 3929, 3930, 3934, 3935, 3937, 3938, 3939, 3941, 3943, 3945, 3946, 3949, 3953, 3954, 3955, 3957, 3958, 3962, 3963, 3965, 3973, 3974, 3977, 3979, 3982, 3983, 3985, 3990, 3991, 3994, 3995, 3998, 4001, 4002, 4003, 4006, 4007, 4009, 4010, 4011, 4013, 4015, 4017, 4019, 4021, 4022, 4026, 4027, 4030, 4031, 4033, 4034, 4035, 4037, 4038, 4039, 4042, 4043, 4049, 4051, 4053, 4054, 4055, 4057, 4062, 4063, 4065, 4066, 4069, 4071, 4073, 4074, 4079, 4081, 4082, 4083, 4085, 4087, 4089, 4090, 4091, 4093, 4094, 4098, 4099, 4101, 4102, 4103, 4105, 4106, 4111, 4115, 4117, 4118, 4119, 4121, 4123, 4127, 4130, 4133, 4134, 4135, 4137, 4138, 4141, 4142, 4143, 4145, 4146, 4147, 4153, 4154, 4155, 4159, 4161, 4162, 4163, 4166, 4170, 4173, 4177, 4178, 4179, 4181, 4183, 4186, 4187, 4190, 4191, 4193, 4198, 4199, 4201, 4206, 4207, 4209, 4215, 4217, 4218, 4219, 4222, 4223, 4226, 4227, 4229, 4231, 4233, 4237, 4238, 4241, 4242, 4245, 4246, 4247, 4249, 4251, 4253, 4254, 4258, 4259, 4261, 4262, 4265, 4267, 4269, 4270, 4273, 4274, 4277, 4278, 4279, 4283, 4285, 4286, 4289, 4290, 4291, 4294, 4295, 4297, 4298, 4299, 4301, 4303, 4306, 4307, 4309, 4310, 4313, 4314, 4315, 4317, 4318, 4322, 4326, 4327, 4330, 4331, 4333, 4337, 4339, 4341, 4343, 4345, 4351, 4354, 4355, 4362, 4363, 4366, 4367, 4369, 4370, 4371, 4373, 4377, 4378, 4379, 4381, 4385, 4386, 4387, 4389, 4390, 4391, 4393, 4395, 4397, 4398, 4403, 4406, 4407, 4409, 4411, 4413, 4414, 4415, 4417, 4421, 4422, 4423, 4426, 4429, 4430, 4431, 4433, 4438, 4439, 4442, 4443, 4449, 4451, 4453, 4454, 4457, 4458, 4462, 4463, 4465, 4466, 4467, 4469, 4470, 4471, 4474, 4478, 4479, 4481, 4483, 4485, 4486, 4490, 4493, 4495, 4497, 4498, 4501, 4502, 4503, 4505, 4507, 4510, 4511, 4514, 4517, 4519, 4523, 4529, 4530, 4534, 4535, 4537, 4538, 4539, 4541, 4542, 4543, 4546, 4547, 4549, 4551, 4558, 4559, 4561, 4562, 4565, 4570, 4574, 4577, 4578, 4579, 4583, 4587, 4589, 4593, 4595, 4597, 4601, 4602, 4603, 4607, 4609, 4611, 4613, 4614, 4615, 4618, 4621, 4623, 4627, 4629, 4633, 4634, 4638, 4639, 4641, 4645, 4646, 4647, 4649, 4651, 4654, 4657, 4658, 4659, 4661, 4663, 4665, 4666, 4667, 4669, 4670, 4673, 4674, 4678, 4679, 4681, 4682, 4683, 4686, 4687, 4690, 4691, 4694, 4699, 4701, 4702, 4703, 4705, 4706, 4710, 4711, 4713, 4714, 4715, 4717, 4722, 4723, 4726, 4729, 4733, 4735, 4737, 4739, 4741, 4742, 4746, 4747, 4749, 4751, 4755, 4758, 4759, 4762, 4765, 4766, 4769, 4771, 4773, 4774, 4777, 4778, 4781, 4782, 4783, 4787, 4790, 4791, 4793, 4795, 4798, 4799, 4801, 4803, 4807, 4809, 4810, 4811,

	d
$\mathcal{T}_5 = 1$	4813, 4814, 4818, 4821, 4822, 4826, 4827, 4829, 4830, 4831, 4834, 4835, 4837, 4838, 4839, 4841, 4845, 4847, 4853, 4854, 4855, 4857, 4858, 4859, 4862, 4863, 4866, 4870, 4871, 4874, 4877, 4879, 4881, 4882, 4883, 4885, 4886, 4890, 4891, 4893, 4894, 4895, 4898, 4899, 4902, 4907, 4909, 4910, 4911, 4915, 4917, 4918, 4919, 4922, 4926, 4927, 4929, 4931, 4933, 4935, 4937, 4938, 4939, 4943, 4945, 4946, 4947, 4951, 4953, 4954, 4955, 4958, 4963, 4965, 4966, 4967, 4969, 4970, 4971, 4973, 4974, 4978, 4982, 4983, 4987, 4989, 4990, 4994, 4997, 4999, 5002, 5003, 5005, 5006, 5007, 5009, 5010, 5011, 5014, 5017, 5018, 5019, 5021, 5023, 5027, 5029, 5033, 5034, 5037, 5038, 5039, 5042, 5045, 5053, 5055, 5057, 5059, 5061, 5062, 5063, 5065, 5069, 5073, 5078, 5079, 5083, 5086, 5091, 5093, 5095, 5097, 5098, 5099, 5101, 5105, 5106, 5109, 5110, 5111, 5113, 5114, 5115, 5117, 5118, 5122, 5123, 5126, 5127, 5131, 5133, 5134, 5135, 5137, 5141, 5142, 5143, 5146, 5147, 5149, 5151, 5153, 5154, 5155, 5158, 5159, 5161, 5162, 5163, 5165, 5167, 5169, 5171, 5178, 5179, 5181, 5182, 5183, 5186, 5187, 5189, 5190, 5191, 5195, 5197, 5199, 5201, 5205, 5206, 5209, 5210, 5213, 5214, 5215, 5217, 5221, 5222, 5226, 5227, 5230, 5231, 5234, 5235, 5237, 5242, 5245, 5246, 5249, 5251, 5253, 5255, 5257, 5258, 5261, 5262, 5263, 5266, 5267, 5270, 5271, 5273, 5277, 5279, 5281, 5282, 5285, 5286, 5287, 5289, 5293, 5294, 5298, 5299, 5302, 5303, 5305, 5306, 5309, 5311, 5313, 5314, 5317, 5318, 5321, 5322, 5323, 5326, 5327, 5330, 5331, 5333, 5334, 5335, 5338, 5339, 5343, 5349, 5351, 5354, 5357, 5358, 5359, 5363, 5366, 5367, 5369, 5370, 5371, 5377, 5378, 5379, 5381, 5383, 5386, 5387, 5394, 5395, 5397, 5398, 5399, 5401, 5402, 5403, 5405, 5407, 5410, 5413, 5414, 5417, 5421, 5422, 5423, 5426, 5429, 5430, 5431, 5433, 5434, 5435, 5437, 5438, 5441, 5442, 5443, 5446, 5447, 5451, 5453, 5455, 5459, 5462, 5465, 5466, 5467, 5469, 5470, 5473, 5477, 5478, 5479, 5483, 5486, 5489, 5494, 5495, 5498, 5503, 5505, 5506, 5509, 5510, 5511, 5513, 5514, 5515, 5518, 5519, 5522, 5523, 5529, 5534, 5538, 5541, 5542, 5543, 5545, 5546, 5549, 5551, 5554, 5555, 5559, 5561, 5563, 5567, 5573, 5579, 5581, 5582, 5585, 5587, 5590, 5591, 5593, 5594, 5597, 5599, 5601, 5603, 5609, 5614, 5617, 5633, 5638, 5639, 5641, 5642, 5646, 5647, 5649, 5653, 5658, 5662, 5665, 5666, 5667, 5669, 5671, 5673, 5674, 5677, 5678, 5681, 5682, 5683, 5686, 5689, 5690, 5691, 5694, 5695, 5698, 5699, 5701, 5702, 5703, 5705, 5707, 5709, 5713, 5714, 5717, 5719, 5721, 5722, 5723, 5726, 5727, 5729, 5730, 5731, 5734, 5735, 5737, 5738, 5739, 5741, 5743, 5747, 5749,

	d
$\mathcal{T}_5 = 1$	5754, 5755, 5757, 5758, 5759, 5761, 5762, 5763, 5765, 5767, 5770, 5771, 5773, 5779, 5781, 5783, 5785, 5786, 5790, 5791, 5793, 5794, 5795, 5798, 5799, 5801, 5802, 5803, 5806, 5807, 5810, 5811, 5813, 5815, 5817, 5818, 5821, 5822, 5827, 5829, 5830, 5833, 5834, 5835, 5837, 5838, 5839, 5842, 5843, 5846, 5847, 5849, 5853, 5854, 5855, 5857, 5862, 5865, 5866, 5867, 5870, 5871, 5873, 5874, 5878, 5879, 5881, 5882, 5883, 5885, 5889, 5890, 5891, 5893, 5894, 5897, 5898, 5899, 5901, 5902, 5903, 5905, 5906, 5909, 5910, 5914, 5917, 5918, 5919, 5921, 5923, 5926, 5930, 5933, 5934, 5935, 5937, 5938, 5939, 5941, 5942, 5943, 5945, 5946, 5947, 5951, 5953, 5954, 5955, 5959, 5962, 5963, 5966, 5969, 5970, 5973, 5974, 5979, 5981, 5982, 5983, 5986, 5987, 5991, 5993, 5995, 5998, 5999, 6005, 6006, 6007, 6010, 6011, 6013, 6014, 6018, 6019, 6022, 6023, 6026, 6029, 6033, 6034, 6035, 6038, 6041, 6042, 6045, 6046, 6047, 6049, 6053, 6054, 6055, 6058, 6059, 6061, 6063, 6065, 6067, 6070, 6077, 6079, 6081, 6082, 6083, 6086, 6090, 6091, 6094, 6095, 6098, 6099, 6101, 6103, 6105, 6106, 6109, 6110, 6115, 6118, 6119, 6121, 6122, 6126, 6127, 6130, 6131, 6133, 6134, 6135, 6139, 6141, 6142, 6143, 6145, 6146, 6153, 6154, 6158, 6159, 6161, 6162, 6163, 6166, 6169, 6170, 6173, 6177, 6178, 6179, 6181, 6182, 6185, 6186, 6189, 6191, 6194, 6195, 6197, 6198, 6199, 6203, 6205, 6207, 6211, 6213, 6214, 6215, 6217, 6218, 6226, 6227, 6229, 6230, 6233, 6234, 6235, 6238, 6242, 6243, 6245, 6247, 6249, 6251, 6254, 6257, 6261, 6262, 6263, 6267, 6269, 6271, 6274, 6277, 6278, 6281, 6285, 6286, 6287, 6289, 6290, 6293, 6295, 6297, 6298, 6299, 6301, 6302, 6303, 6305, 6306, 6307, 6310, 6311, 6313, 6314, 6315, 6317, 6322, 6326, 6329, 6330, 6331, 6334, 6335, 6338, 6339, 6341, 6342, 6343, 6346, 6347, 6349, 6351, 6353, 6355, 6359, 6361, 6367, 6369, 6371, 6373, 6374, 6377, 6378, 6379, 6382, 6383, 6385, 6387, 6389, 6393, 6394, 6397, 6398, 6401, 6402, 6403, 6405, 6406, 6409, 6410, 6411, 6414, 6415, 6418, 6421, 6423, 6429, 6430, 6433, 6434, 6439, 6441, 6442, 6443, 6445, 6446, 6447, 6449, 6454, 6457, 6458, 6459, 6463, 6465, 6466, 6469, 6473, 6477, 6478, 6479, 6482, 6483, 6485, 6486, 6487, 6490, 6491, 6493, 6494, 6495, 6499, 6502, 6503, 6505, 6506, 6509, 6510, 6511, 6513, 6514, 6515, 6518, 6519, 6521, 6522, 6523, 6527, 6529, 6530, 6531, 6533, 6535, 6537, 6539, 6541, 6542, 6545, 6546, 6549, 6551, 6553, 6555, 6557, 6558, 6559, 6562, 6565, 6569, 6571, 6573, 6577, 6578, 6581, 6582, 6583, 6585, 6586, 6589, 6590, 6593, 6594, 6595, 6598, 6599, 6601, 6602, 6603, 6605, 6607, 6609, 6610, 6611, 6613, 6614, 6617, 6618, 6619, 6621, 6623, 6626, 6630, 6631, 6634, 6637, 6643, 6645, 6646, 6653, 6654, 6657, 6658, 6659, 6661, 6663, 6665, 6667, 6670, 6671,

	d
$\mathcal{T}_5 = 1$	6673, 6679, 6681, 6683, 6685, 6686, 6690, 6693, 6694, 6695, 6699, 6701, 6702, 6703, 6709, 6711, 6715, 6717, 6718, 6721, 6722, 6729, 6730, 6731, 6733, 6735, 6737, 6738, 6739, 6742, 6745, 6746, 6749, 6751, 6753, 6754, 6755, 6757, 6758, 6763, 6765, 6766, 6767, 6769, 6771, 6773, 6774, 6778, 6781, 6785, 6787, 6789, 6790, 6791, 6793, 6794, 6797, 6798, 6802, 6803, 6805, 6806, 6807, 6809, 6810, 6815, 6817, 6818, 6821, 6823, 6826, 6827, 6829, 6833, 6834, 6835, 6838, 6839, 6841, 6842, 6843, 6846, 6847, 6851, 6855, 6857, 6861, 6862, 6865, 6869, 6870, 6873, 6874, 6878, 6879, 6881, 6882, 6883, 6886, 6890, 6893, 6898, 6899, 6901, 6902, 6905, 6906, 6907, 6910, 6911, 6913, 6914, 6915, 6918, 6919, 6922, 6923, 6926, 6927, 6931, 6933, 6934, 6935, 6938, 6941, 6942, 6946, 6947, 6951, 6954, 6955, 6961, 6963, 6965, 6970, 6971, 6973, 6974, 6977, 6978, 6979, 6981, 6982, 6983, 6985, 6986, 6987, 6989, 6990, 6991, 6995, 6997, 6998, 6999, 7001, 7003, 7006, 7010, 7013, 7014, 7015, 7017, 7021, 7026, 7030, 7031, 7033, 7035, 7039, 7042, 7043, 7045, 7046, 7051, 7053, 7054, 7055, 7058, 7059, 7061, 7062, 7063, 7066, 7070, 7073, 7077, 7078, 7079, 7081, 7082, 7085, 7086, 7087, 7089, 7090, 7093, 7095, 7097, 7099, 7102, 7103, 7106, 7107, 7109, 7114, 7115, 7117, 7118, 7121, 7122, 7123, 7126, 7127, 7130, 7131, 7133, 7134, 7135, 7138, 7141, 7142, 7143, 7145, 7147, 7149, 7151, 7153, 7157, 7158, 7159, 7161, 7162, 7163, 7165, 7166, 7167, 7169, 7174, 7177, 7178, 7179, 7181, 7183, 7185, 7187, 7189, 7190, 7193, 7194, 7195, 7197, 7198, 7199, 7201, 7202, 7205, 7206, 7207, 7210, 7211, 7213, 7214, 7215, 7217, 7219, 7222, 7223, 7226, 7230, 7233, 7234, 7235, 7237, 7238, 7239, 7241, 7242, 7243, 7246, 7247, 7249, 7251, 7257, 7258, 7259, 7261, 7262, 7265, 7266, 7269, 7270, 7273, 7274, 7277, 7278, 7279, 7283, 7285, 7286, 7287, 7289, 7291, 7293, 7294, 7295, 7297, 7298, 7303, 7305, 7309, 7310, 7311, 7313, 7314, 7315, 7318, 7319, 7321, 7322, 7323, 7329, 7333, 7334, 7337, 7338, 7341, 7342, 7343, 7345, 7346, 7349, 7351, 7355, 7357, 7358, 7359, 7363, 7365, 7366, 7367, 7369, 7370, 7373, 7377, 7378, 7379, 7382, 7383, 7385, 7386, 7387, 7393, 7395, 7397, 7402, 7403, 7405, 7409, 7410, 7411, 7413, 7417, 7418, 7419, 7421, 7422, 7423, 7427, 7429, 7430, 7431, 7433, 7435, 7437, 7438, 7441, 7445, 7446, 7447, 7449, 7453, 7454, 7455, 7457, 7458, 7462, 7463, 7466, 7469, 7471, 7473, 7474, 7477, 7478, 7482, 7485, 7487, 7490, 7491, 7493, 7494, 7495, 7498, 7499, 7501, 7505, 7507, 7509, 7510, 7511, 7517, 7518, 7519, 7521, 7522, 7523, 7527, 7529, 7531, 7534, 7535, 7537, 7538, 7541, 7543, 7549, 7553, 7554, 7557, 7558, 7559, 7562, 7563, 7565, 7566, 7567, 7573, 7577, 7579, 7582,

	d
$\mathcal{T}_5 = 1$	7583, 7585, 7589, 7593, 7594, 7597, 7598, 7599, 7601, 7602, 7603, 7606, 7607, 7609, 7610, 7613, 7615, 7617, 7618, 7619, 7621, 7622, 7626, 7629, 7630, 7631, 7633, 7635, 7637, 7638, 7639, 7642, 7643, 7645, 7646, 7647, 7649, 7651, 7657, 7661, 7662, 7663, 7666, 7667, 7669, 7670, 7671, 7673, 7678, 7679, 7681, 7682, 7683, 7685, 7687, 7690, 7691, 7694, 7697, 7698, 7699, 7701, 7702, 7703, 7706, 7707, 7709, 7710, 7711, 7714, 7715, 7718, 7719, 7723, 7726, 7727, 7729, 7733, 7735, 7737, 7738, 7741, 7745, 7747, 7751, 7753, 7754, 7755, 7757, 7759, 7761, 7763, 7765, 7766, 7769, 7770, 7771, 7773, 7777, 7778, 7779, 7781, 7782, 7783, 7786, 7787, 7790, 7795, 7797, 7798, 7799, 7802, 7805, 7806, 7807, 7809, 7810, 7813, 7814, 7815, 7818, 7819, 7826, 7827, 7831, 7834, 7835, 7837, 7838, 7841, 7843, 7845, 7846, 7849, 7851, 7853, 7854, 7858, 7859, 7863, 7867, 7869, 7870, 7873, 7874, 7877, 7878, 7879, 7881, 7882, 7885, 7886, 7887, 7890, 7891, 7894, 7898, 7899, 7901, 7903, 7905, 7906, 7907, 7909, 7913, 7914, 7915, 7917, 7919, 7922, 7923, 7926, 7927, 7930, 7931, 7934, 7937, 7939, 7945, 7946, 7951, 7953, 7954, 7955, 7957, 7958, 7959, 7962, 7966, 7969, 7970, 7971, 7973, 7977, 7978, 7981, 7982, 7989, 7990, 7991, 7994, 7995, 7998, 7999, 8003, 8005, 8006, 8007, 8011, 8014, 8015, 8017, 8018, 8029, 8030, 8031, 8033, 8034, 8035, 8038, 8039, 8041, 8042, 8043, 8045, 8051, 8053, 8054, 8058, 8059, 8061, 8062, 8063, 8065, 8066, 8069, 8070, 8077, 8079, 8081, 8083, 8086, 8087, 8089, 8090, 8093, 8094, 8095, 8097, 8098, 8101, 8103, 8105, 8106, 8110, 8111, 8113, 8115, 8117, 8122, 8123, 8126, 8130, 8131, 8133, 8135, 8137, 8138, 8139, 8142, 8143, 8146, 8147, 8149, 8151, 8153, 8157, 8158, 8159, 8161, 8162, 8165, 8166, 8169, 8170, 8171, 8173, 8174, 8177, 8179, 8185, 8186, 8187, 8189, 8191, 8193, 8194, 8195, 8197, 8198, 8202, 8203, 8205, 8206, 8210, 8211, 8213, 8215, 8218, 8221, 8222, 8223, 8227, 8229, 8230, 8231, 8233, 8234, 8237, 8238, 8239, 8241, 8242, 8243, 8245, 8246, 8247, 8249, 8251, 8254, 8255, 8257, 8258, 8259, 8263, 8265, 8266, 8267, 8269, 8274, 8277, 8278, 8279, 8283, 8285, 8287, 8290, 8291, 8293, 8295, 8297, 8299, 8301, 8302, 8305, 8306, 8310, 8313, 8314, 8315, 8318, 8322, 8326, 8327, 8329, 8333, 8335, 8337, 8338, 8342, 8345, 8346, 8347, 8351, 8353, 8354, 8355, 8357, 8358, 8359, 8362, 8363, 8365, 8367, 8369, 8371, 8373, 8374, 8377, 8378, 8382, 8385, 8386, 8387, 8390, 8393, 8394, 8395, 8398, 8399, 8402, 8407, 8409, 8411, 8418, 8421, 8422, 8423, 8426, 8429, 8430, 8431, 8434, 8435, 8437, 8439, 8441, 8443, 8445, 8447, 8453, 8454, 8455, 8457, 8458, 8461, 8463, 8465, 8466, 8467, 8473, 8474, 8474, 8481, 8485, 8486, 8489, 8490, 8491, 8493, 8494,

	d
$\mathcal{T}_5 = 1$	8495, 8498, 8499, 8507, 8510, 8511, 8513, 8515, 8517, 8518, 8519, 8521, 8522, 8527, 8529, 8530, 8531, 8533, 8534, 8535, 8537, 8538, 8542, 8543, 8545, 8547, 8549, 8551, 8553, 8554, 8555, 8557, 8558, 8561, 8565, 8567, 8570, 8571, 8573, 8574, 8578, 8581, 8582, 8583, 8585, 8587, 8590, 8593, 8598, 8601, 8602, 8603, 8606, 8609, 8610, 8611, 8614, 8615, 8617, 8618, 8621, 8623, 8626, 8627, 8629, 8630, 8633, 8635, 8637, 8641, 8642, 8643, 8645, 8646, 8647, 8654, 8655, 8657, 8659, 8661, 8662, 8665, 8666, 8669, 8671, 8674, 8677, 8678, 8679, 8681, 8682, 8683, 8686, 8691, 8697, 8699, 8701, 8702, 8705, 8706, 8710, 8711, 8713, 8714, 8715, 8717, 8719, 8723, 8726, 8727, 8729, 8731, 8733, 8734, 8735, 8737, 8741, 8743, 8745, 8747, 8749, 8751, 8753, 8754, 8755, 8758, 8759, 8761, 8762, 8765, 8767, 8769, 8770, 8773, 8774, 8777, 8778, 8779, 8781, 8782, 8783, 8786, 8787, 8791, 8795, 8797, 8798, 8799, 8801, 8805, 8807, 8809, 8810, 8813, 8814, 8815, 8817, 8818, 8819, 8821, 8822, 8827, 8830, 8831, 8834, 8835, 8837, 8839, 8841, 8842, 8846, 8849, 8851, 8853, 8854, 8855, 8857, 8858, 8859, 8861, 8862, 8863, 8866, 8867, 8870, 8871, 8873, 8879, 8882, 8885, 8887, 8889, 8890, 8891, 8894, 8897, 8899, 8902, 8903, 8905, 8906, 8907, 8909, 8911, 8913, 8917, 8921, 8922, 8927, 8929, 8930, 8931, 8933, 8934, 8935, 8939, 8941, 8943, 8945, 8947, 8949, 8951, 8953, 8958, 8961, 8962, 8963, 8965, 8969, 8970, 8971, 8974, 8977, 8979, 8981, 8983, 8985, 8986, 8987, 8990, 8997, 8999, 9001, 9002, 9005, 9007, 9010, 9011, 9014, 9015, 9017, 9019, 9021, 9022, 9023, 9026, 9029, 9030, 9031, 9033, 9034, 9035, 9037, 9038, 9039, 9041, 9042, 9043, 9046, 9049, 9051, 9053, 9055, 9061, 9062, 9066, 9067, 9069, 9070, 9071, 9073, 9074, 9077, 9078, 9079, 9082, 9085, 9086, 9087, 9089, 9091, 9093, 9094, 9095, 9097, 9098, 9101, 9103, 9105, 9106, 9107, 9109, 9110, 9111, 9113, 9115, 9118, 9119, 9121, 9122, 9123, 9127, 9129, 9130, 9131, 9133, 9134, 9137, 9139, 9141, 9142, 9143, 9146, 9149, 9151, 9155, 9158, 9159, 9165, 9167, 9169, 9174, 9177, 9178, 9179, 9182, 9183, 9186, 9190, 9191, 9193, 9194, 9195, 9197, 9199, 9201, 9202, 9205, 9209, 9210, 9211, 9213, 9215, 9217, 9218, 9219, 9221, 9222, 9223, 9226, 9227, 9231, 9233, 9237, 9238, 9239, 9241, 9242, 9246, 9249, 9253, 9254, 9255, 9257, 9259, 9262, 9263, 9266, 9267, 9269, 9271, 9273, 9274, 9277, 9278, 9281, 9282, 9283, 9285, 9286, 9287, 9289, 9290, 9291, 9293, 9298, 9299, 9301, 9302, 9303, 9305, 9307, 9311, 9314, 9318, 9319, 9327, 9329, 9330, 9334, 9335, 9337, 9338, 9339, 9341, 9343, 9345, 9346, 9347, 9349, 9353, 9354, 9355, 9361, 9362, 9363, 9365, 9366, 9370, 9377, 9379, 9381, 9382, 9383, 9385, 9389, 9390, 9391, 9394, 9395, 9397, 9401, 9402, 9406, 9407, 9413, 9415, 9417, 9418, 9421, 9422, 9426, 9427, 9429, 9430, 9435, 9437, 9439, 9442, 9445, 9447, 9451,

	d
$\mathcal{T}_5 = 1$	9453, 9455, 9458, 9461, 9462, 9465, 9466, 9469, 9470, 9473, 9478, 9479, 9481, 9482, 9483, 9485, 9487, 9489, 9490, 9493, 9498, 9499, 9501, 9502, 9503, 9505, 9507, 9509, 9510, 9511, 9515, 9517, 9519, 9521, 9523, 9526, 9527, 9529, 9530, 9534, 9541, 9542, 9545, 9546, 9547, 9551, 9554, 9557, 9561, 9562, 9563, 9566, 9569, 9571, 9579, 9581, 9586, 9587, 9589, 9590, 9591, 9593, 9595, 9597, 9599, 9601, 9602, 9605, 9606, 9607, 9609, 9614, 9617, 9618, 9619, 9622, 9623, 9626, 9629, 9634, 9635, 9637, 9638, 9643, 9645, 9646, 9647, 9649, 9651, 9654, 9655, 9658, 9661, 9662, 9663, 9665, 9667, 9671, 9673, 9677, 9678, 9679, 9681, 9682, 9683, 9686, 9687, 9689, 9691, 9694, 9695, 9697, 9698, 9703, 9706, 9707, 9710, 9713, 9714, 9715, 9717, 9718, 9723, 9726, 9727, 9730, 9733, 9734, 9735, 9737, 9739, 9741, 9743, 9746, 9749, 9753, 9754, 9755, 9758, 9759, 9761, 9762, 9763, 9766, 9767, 9769, 9771, 9773, 9777, 9778, 9779, 9781, 9782, 9786, 9787, 9789, 9790, 9791, 9793, 9794, 9795, 9798, 9805, 9806, 9807, 9809, 9811, 9813, 9815, 9817, 9818, 9821, 9822, 9823, 9827, 9830, 9831, 9833, 9834, 9835, 9838, 9839, 9842, 9843, 9845, 9851, 9853, 9854, 9857, 9858, 9859, 9862, 9863, 9866, 9867, 9869, 9870, 9874, 9877, 9878, 9879, 9881, 9883, 9887, 9889, 9890, 9893, 9894, 9897, 9899, 9901, 9903, 9905, 9906, 9907, 9910, 9913, 9914, 9915, 9917, 9919, 9921, 9923, 9926, 9929, 9930, 9931, 9934, 9935, 9937, 9938, 9939, 9941, 9943, 9946, 9953, 9955, 9957, 9959, 9961, 9962, 9965, 9967, 9969, 9970, 9973, 9974, 9977, 9978, 9979, 9983, 9985, 9986, 9987, 9991, 9994, 9997
$\mathcal{T}_5 = [5]$	38, 39, 42, 51, 53, 69, 70, 82, 107, 109, 114, 115, 127, 130, 134, 143, 155, 161, 183, 185, 186, 202, 211, 214, 238, 241, 257, 259, 271, 278, 287, 298, 314, 326, 366, 382, 401, 407, 422, 426, 430, 433, 439, 453, 457, 466, 467, 473, 489, 497, 499, 501, 502, 509, 519, 523, 526, 534, 537, 541, 543, 574, 581, 587, 615, 623, 626, 627, 629, 635, 645, 662, 673, 674, 687, 699, 719, 727, 734, 745, 753, 761, 767, 789, 791, 795, 798, 817, 857, 869, 874, 881, 893, 922, 923, 933, 935, 943, 947, 966, 978, 983, 995, 1031, 1041, 1042, 1065, 1074, 1079, 1086, 1087, 1093, 1110, 1113, 1115, 1118, 1126, 1133, 1135, 1137, 1173, 1182, 1187, 1191, 1213, 1214, 1226, 1231, 1238, 1261, 1262, 1265, 1267, 1281, 1289, 1293, 1301, 1313, 1321,

	d
$\mathcal{T}_5 = [5]$	1327, 1335, 1339, 1351, 1366, 1382, 1389, 1393, 1402, 1405, 1406, 1407, 1410, 1426, 1427, 1429, 1434, 1441, 1443, 1461, 1465, 1479, 1486, 1490, 1493, 1518, 1529, 1531, 1577, 1586, 1597, 1631, 1637, 1658, 1662, 1663, 1686, 1699, 1702, 1713, 1717, 1738, 1741, 1754, 1758, 1761, 1762, 1766, 1777, 1786, 1790, 1797, 1798, 1803, 1817, 1829, 1834, 1838, 1851, 1853, 1861, 1874, 1891, 1897, 1898, 1907, 1913, 1914, 1943, 1955, 1959, 1966, 1969, 1982, 1990, 1999, 2002, 2003, 2027, 2031, 2033, 2038, 2081, 2083, 2101, 2111, 2119, 2130, 2135, 2153, 2157, 2171, 2189, 2190, 2230, 2234, 2243, 2257, 2262, 2263, 2279, 2285, 2290, 2307, 2323, 2334, 2335, 2345, 2355, 2359, 2362, 2386, 2391, 2397, 2406, 2438, 2459, 2471, 2490, 2495, 2498, 2501, 2503, 2505, 2510, 2513, 2522, 2533, 2545, 2546, 2557, 2558, 2566, 2573, 2577, 2578, 2579, 2599, 2602, 2609, 2634, 2654, 2657, 2667, 2671, 2683, 2694, 2723, 2739, 2741, 2743, 2746, 2770, 2795, 2803, 2822, 2829, 2851, 2877, 2878, 2885, 2886, 2911, 2923, 2931, 2935, 2983, 2986, 2991, 2994, 3054, 3059, 3082, 3111, 3121, 3129, 3134, 3138, 3145, 3155, 3165, 3166, 3181, 3182, 3183, 3193, 3194, 3202, 3206, 3215, 3226, 3238, 3246, 3270, 3277, 3281, 3297, 3299, 3311, 3322, 3323, 3337, 3347, 3369, 3374, 3378, 3379, 3390, 3391, 3395, 3398, 3403, 3405, 3409, 3413, 3415, 3417, 3445, 3451, 3453, 3469, 3471, 3482, 3499, 3506, 3507, 3526, 3541, 3543, 3554, 3569, 3574, 3585, 3593, 3598, 3599, 3601, 3639, 3642, 3643, 3653, 3666, 3670, 3687, 3691, 3694, 3697, 3705, 3709, 3713, 3722, 3743, 3765, 3770, 3782, 3783, 3790, 3795, 3799, 3814, 3815, 3829, 3830, 3863, 3866, 3878, 3898, 3902, 3911, 3919, 3931, 3947, 3959, 3961, 3966, 3967, 3970, 3981, 3989, 3997, 3999, 4029, 4045, 4058, 4070, 4078, 4097, 4109, 4110, 4129, 4151, 4169, 4171, 4174, 4182, 4189, 4195, 4197, 4210, 4211, 4234, 4243, 4255, 4271, 4281, 4282, 4305, 4319, 4321, 4323, 4334, 4342, 4346, 4353, 4358, 4359, 4402, 4405, 4427, 4434, 4435, 4445, 4447, 4461, 4487, 4494, 4499, 4513, 4515, 4521, 4526, 4533, 4553, 4555, 4566, 4567, 4569, 4571, 4582, 4585, 4591, 4605, 4610, 4619, 4622, 4630, 4631, 4637, 4642, 4643, 4677, 4685, 4697, 4718, 4727, 4730, 4731, 4738, 4754, 4757, 4763, 4767, 4785, 4786, 4789, 4794, 4819, 4843, 4846, 4861, 4865, 4867, 4873, 4889, 4897, 4906, 4921, 4930, 4957, 4962, 4979, 4981, 4985, 4991, 4993, 5001, 5015, 5030, 5035, 5051, 5066, 5071, 5074, 5077, 5081, 5087, 5089, 5090, 5107, 5119, 5138, 5173, 5174, 5185, 5198, 5207, 5218,

	d
$\mathcal{T}_5 = [5]$	5219, 5223, 5233, 5241, 5254, 5269, 5278, 5291, 5295, 5297, 5307, 5342, 5345, 5347, 5353, 5361, 5362, 5365, 5374, 5385, 5389, 5393, 5406, 5411, 5419, 5449, 5457, 5458, 5461, 5471, 5474, 5482, 5487, 5493, 5497, 5501, 5502, 5507, 5521, 5527, 5530, 5531, 5533, 5539, 5557, 5558, 5565, 5569, 5570, 5574, 5578, 5583, 5595, 5602, 5605, 5606, 5610, 5611, 5613, 5619, 5621, 5622, 5623, 5626, 5627, 5629, 5637, 5645, 5651, 5654, 5655, 5659, 5663, 5685, 5693, 5710, 5711, 5718, 5753, 5777, 5789, 5797, 5809, 5826, 5858, 5863, 5869, 5907, 5911, 5927, 5957, 5961, 5965, 5971, 5977, 5990, 5997, 6002, 6009, 6015, 6017, 6031, 6037, 6043, 6062, 6071, 6073, 6074, 6078, 6085, 6087, 6089, 6113, 6114, 6117, 6149, 6151, 6157, 6167, 6187, 6190, 6193, 6202, 6209, 6222, 6231, 6239, 6258, 6259, 6265, 6266, 6270, 6279, 6294, 6319, 6323, 6333, 6337, 6357, 6362, 6365, 6386, 6395, 6407, 6431, 6437, 6438, 6455, 6467, 6470, 6474, 6481, 6497, 6501, 6526, 6538, 6554, 6587, 6622, 6629, 6635, 6638, 6639, 6649, 6662, 6666, 6674, 6677, 6682, 6689, 6691, 6698, 6706, 6710, 6719, 6726, 6734, 6743, 6747, 6761, 6779, 6782, 6783, 6799, 6814, 6819, 6837, 6853, 6854, 6863, 6866, 6871, 6887, 6891, 6895, 6917, 6937, 6943, 6949, 6953, 6959, 6967, 6969, 6994, 7005, 7009, 7019, 7022, 7023, 7027, 7034, 7037, 7041, 7049, 7057, 7067, 7091, 7094, 7111, 7113, 7129, 7170, 7186, 7221, 7229, 7231, 7253, 7255, 7271, 7302, 7306, 7307, 7327, 7330, 7331, 7347, 7354, 7361, 7390, 7391, 7394, 7401, 7414, 7415, 7439, 7451, 7459, 7465, 7467, 7481, 7486, 7489, 7503, 7526, 7530, 7539, 7545, 7547, 7555, 7561, 7570, 7571, 7574, 7586, 7591, 7611, 7627, 7634, 7655, 7658, 7665, 7674, 7689, 7705, 7717, 7721, 7730, 7734, 7739, 7743, 7746, 7762, 7789, 7793, 7811, 7817, 7822, 7823, 7829, 7833, 7855, 7861, 7862, 7871, 7883, 7895, 7897, 7941, 7949, 7961, 7963, 7967, 7979, 7985, 7993, 7997, 8002, 8013, 8021, 8022, 8023, 8026, 8027, 8047, 8049, 8057, 8067, 8071, 8078, 8099, 8102, 8114, 8121, 8155, 8178, 8182, 8201, 8207, 8209, 8261, 8270, 8273, 8286, 8294, 8309, 8311, 8319, 8321, 8323, 8331, 8339, 8341, 8366, 8383, 8389, 8391, 8403, 8413, 8414, 8419, 8438, 8446, 8449, 8459, 8462, 8471, 8479, 8482, 8483, 8497, 8501, 8502, 8506, 8509, 8539, 8546, 8562, 8566, 8579, 8589, 8594, 8597, 8599, 8605, 8607, 8634, 8653, 8663, 8687, 8689, 8698, 8707, 8718, 8738, 8746, 8763, 8785, 8794, 8803, 8806, 8823, 8826, 8845, 8877, 8881, 8893, 8895, 8898, 8914, 8923, 8926, 8938, 8966, 8994, 8995, 8998, 9006, 9057, 9083, 9102, 9145, 9147, 9154, 9161, 9173, 9203, 9206, 9214, 9229, 9235, 9258, 9265, 9294, 9309, 9313, 9321, 9322, 9323, 9326, 9331, 9357, 9358, 9371, 9373, 9374, 9393, 9398, 9399, 9403, 9410,

	d
$\mathcal{T}_5 = [5]$	9411, 9419, 9431, 9433, 9434, 9443, 9446, 9449, 9463, 9467, 9471, 9474, 9491, 9494, 9514, 9518, 9533, 9535, 9539, 9543, 9553, 9565, 9573, 9574, 9577, 9578, 9582, 9598, 9611, 9613, 9627, 9631, 9641, 9642, 9659, 9669, 9670, 9674, 9685, 9690, 9701, 9705, 9709, 9719, 9721, 9722, 9731, 9742, 9745, 9757, 9785, 9797, 9799, 9803, 9814, 9829, 9847, 9861, 9865, 9871, 9885, 9886, 9895, 9911, 9933, 9942, 9949, 9951, 9958, 9982, 9989, 9993, 9995, 9998
$\mathcal{T}_5 = [5, 5]$	1111, 4357, 9166.
$\mathcal{T}_5 = [25]$	62, 73, 89, 139, 191, 295, 427, 434, 514, 589, 597, 602, 617, 622, 955, 982, 1051, 1157, 1185, 1194, 1243, 1247, 1279, 1285, 1317, 1338, 1398, 1535, 1565, 1621, 1633, 1723, 1731, 1735, 1921, 1938, 1986, 2014, 2158, 2287, 2326, 2399, 2411, 2571, 2661, 2687, 2698, 2731, 2843, 2870, 2905, 2955, 2966, 2973, 2993, 3039, 3041, 3077, 3101, 3130, 3169, 3269, 3289, 3307, 3349, 3497, 3661, 3673, 3715, 3786, 3905, 3907, 3927, 4047, 4061, 4139, 4157, 4202, 4349, 4382, 4399, 4441, 4522, 4531, 4573, 4586, 4594, 4695, 4709, 4721, 4745, 4823, 4849, 4903, 4942, 5026, 5102, 5170, 5177, 5259, 5315, 5615, 5630, 5631, 5657, 5774, 5851, 5989, 6001, 6051, 6155, 6206, 6221, 6283, 6391, 6451, 6461, 6547, 6574, 6697, 6707, 6770, 6801, 6830, 7069, 7071, 7282, 7339, 7374, 7426, 7483, 7590, 7653, 7801, 7847, 7910, 7918, 7933, 8074, 8119, 8141, 8167, 8219, 8317, 8401, 8417, 8503, 8563, 8569, 8638, 8639, 8651, 8690, 8693, 8695, 8742, 8789, 8790, 8878, 8886, 8915, 8942, 8989, 9003, 9013, 9058, 9157, 9170, 9181, 9185, 9187, 9247, 9367, 9454, 9497, 9538, 9570, 9615, 9699, 9841, 9902, 9966.
$\mathcal{T}_5 = [125]$	217, 606, 634, 2342, 2395, 3055, 3251, 3253, 3986, 4287, 4506, 4934, 5129, 5745, 5861, 6097, 6107, 6123, 6366, 6567, 6641, 6945, 7171, 7513, 7654, 7842, 8009, 8282, 8709, 9047, 9059, 9138, 9230, 9770
$\mathcal{T}_5 = [625]$	1641, 2122, 4126, 4213, 4817, 5485, 5845, 6427, 6563, 8129, 8843.

Bibliographie

- [Ax65] James AX – « On the units of an algebraic number field », *Illinois J. Math.* **9** (1965), p. 584–589.
- [Bel97] K. BELABAS – « A fast algorithm to compute cubic fields », *Math. Comp.* **115** (1997), no. 66, p. 1213–1237.
- [Bru67] Armand BRUMER – « On the units of algebraic number fields », *Mathematika* **14** (1967), p. 121–124.
- [CL84] H. COHEN et H. W. LENSTRA, Jr. – « Heuristics on class groups of number fields », Number theory, Noordwijkerhout 1983 (Noordwijkerhout, 1983), Lecture Notes in Math., vol. 1068, Springer, 1984, p. 33–62.
- [Del07] Christophe DELAUNAY – « Heuristics on class groups and on Tate-Shafarevich groups : the magic of the Cohen-Lenstra heuristics », Ranks of elliptic curves and random matrix theory, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 341, Cambridge Univ. Press, 2007, p. 323–340.
- [FW79] Bruce FERRERO et Lawrence C. WASHINGTON – « The Iwasawa invariant μ_p vanishes for abelian number fields », *Ann. of Math.* (2) **109** (1979), no. 2, p. 377–395.
- [Gra82] Georges GRAS – « Groupe de galois de la p -extension abélienne p -ramifiée maximale d'un corps de nombres. », *J. Reine Angew. Math.* **333** (1982), p. 86–132.
- [Gra03] — , *Class field theory*, 2003.
- [Gre76] Ralph GREENBERG – « On the Iwasawa invariants of totally real number fields », *Amer. J. Math.* **98** (1976), no. 1, p. 263–284.
- [Hal38] P. HALL – « A partition formula connected with Abelian groups », *Comment. Math. Helv.* **11** (1938), no. 1, p. 126–129.

- [Iwa59] Kenkichi IWASAWA – « On Γ -extensions of algebraic number fields », *Bull. Amer. Math. Soc.* **65** (1959), p. 183–226.
- [Iwa73] — , « On \mathbf{Z}_l -extensions of algebraic number fields », *Ann. of Math.* (2) **98** (1973), p. 246–326.
- [Jau85] Jean-François JAULENT – « Sur l’indépendance l -adique de nombres algébriques », *J. Number Theory* **20** (1985), no. 2, p. 149–158.
- [Jau98] — , « Théorie l -adique globale du corps de classes », *J. Théor. Nombres Bordeaux* **10** (1998), no. 2, p. 355–397.
- [KS95] James S. KRAFT et René SCHOOF – « Computing Iwasawa modules of real quadratic number fields », *Compositio Math.* **97** (1995), p. 135–155, Special issue in honour of Frans Oort.
- [Lan66] Serge LANG – *Introduction to transcendental numbers*, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., 1966.
- [MNQD90] A. MOVAHHEDI et T. NGUYEN-QUANG-DO – « Sur l’arithmétique des corps de nombres p -rationnels », Séminaire de Théorie des Nombres, Paris 1987–88, Progr. Math., vol. 81, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990, p. 155–200.
- [NSW00] Jürgen NEUKIRCH, Alexander SCHMIDT et Kay WINGBERG – *Cohomology of number fields*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 323, Springer-Verlag, Berlin, 2000.
- [PAR13] The PARI Group – Bordeaux, *Pari/gp, version 2.6.0*, 2013, available from <http://pari.math.u-bordeaux.fr/>.
- [Sam67] Pierre SAMUEL – *Théorie algébrique des nombres*, Hermann, Paris, 1967.
- [Ser68] Jean-Pierre SERRE – *Corps locaux*, Hermann, Paris, 1968, Deuxième édition, Publications de l’Université de Nancago, No. VIII.
- [Tay99] Hisao TAYA – « On p -adic L -functions and \mathbf{Z}_p -extensions of certain real abelian number fields », *J. Number Theory* **75** (1999), no. 2, p. 170–184.
- [Wal81] Michel WALDSCHMIDT – « Transcendance et exponentielles en plusieurs variables », *Invent. Math.* **63** (1981), no. 1, p. 97–127.

- [Wil95] Andrew WILES – « Modular elliptic curves and Fermat’s last theorem », *Ann. of Math.* (2) **141** (1995), no. 3, p. 443–551.