FORMULES DE CLASSES POUR LES CORPS ABÉLIENS RÉELS

Jean-Robert Belliard, Thong Nguyen Quang Do

Abstract. We show p-adic and "character by character" refinements of Sinnott's index formula for a totally real abelian number field. Such refinements have also been obtained by Kuz'min by different methods (but see comments in the introduction). Applications are given to Iwasawa theory of semi-local units and cyclotomic units.

0– Introduction

Depuis les travaux de Kummer sur les corps cyclotomiques, de nombreux auteurs (Hasse, Leopoldt, Sinnott ...) ont essayé de généraliser la définition du groupe des unités cyclotomiques C_K à l'intérieur des unités globales U_K, dans le but de donner une expression du nombre de classes $h_K = \#Cl_K$ d'un corps abélien réel K en fonction de l'indice $(U_K : C_K)$. L'unanimité semble plus ou moins s'être faite autour des unités circulaires de Sinnott (voir [Si 1] et [Si 2]), qui présentent plusieurs avantages :

(i) La formule de Sinnott s'écrit :

$$(U_K : C_K) = 2^{[K:\mathbb{Q}]-1} c_K h_K,$$

où c_K est une constante rationnelle qui ne dépend pas explicitement du groupe des classes de K (mais qui en dépend implicitement, bien sûr). Plus précisément, on peut écrire : $c_K = c'_K\ c''_K$, avec

$$c'_K = \frac{\prod_l [K \cap \mathbb{Q}(\zeta_{l^\infty}) : \mathbb{Q}]}{[K:\mathbb{Q}]} \quad \text{et} \quad c''_K = (\mathbb{Z}[G] : Iw(K)),$$

où $\mathbb{Z}[G]$ est l'algèbre du groupe $G = \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ et $Iw(K)$ un certain sous-module de $\mathbb{Q}[G]$ dont Sinnott attribue la paternité à Iwasawa, d'où la notation (ce module est noté U dans [Si 1] et [Si 2]).

(ii) La p-partie de la constante c_K est triviale dans un grand nombre de cas, en particulier dans le cas semi-simple ($p \nmid [K:\mathbb{Q}]$) ou, pour $p \neq 2$, dans le cas cyclotomique (K de la forme $\mathbb{Q}(\zeta_m)^+$).

(iii) Si l'on monte dans la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique $K_\infty = \bigcup_n K_n$, les constantes c_{K_n} restent bornées (ce qui n'est pas le cas, par exemple, si l'on considère les unités de Leopoldt).

(iv) Cette stabilisation asymptotique des c_{K_n} constitue un ingrédient essentiel pour montrer, comme le fait par exemple Villemot [V], que les Λ-modules :
$\overline{U}_\infty/\overline{C}_\infty = \varprojlim (U_{K_n} \otimes \mathbb{Z}_p / C_{K_n} \otimes \mathbb{Z}_p)$ et $X_\infty = \varprojlim (Cl_{K_n} \otimes \mathbb{Z}_p)$ ont même série caractéristique. Ceci peut être considéré comme l'analogue p-adique au niveau infini de la formule de Sinnott, mais sans facteur parasite.

L'étape naturelle suivante consiste à chercher des raffinements de la formule de Sinnott, qui soient p-adiques et "caractère par caractère". La formule p-adique sans caractère est facile à obtenir : il suffit de tensoriser par $\mathbb{Z}_p$ les réseaux qui interviennent dans la formule de Sinnott. Si l'on fait intervenir les caractères (p-adiques) de G, le problème est beaucoup plus compliqué. Il suffit pour s'en convaincre de se rappeler que le passage de la formule analytique donnant la partie "moins" du nombre de classes d'un corps abélien imaginaire, aux formules "caractère (p-adique) par caractère", ne constitue rien d'autre que la Conjecture Principale, ou le théorème de Mazur-Wiles ! (D'ailleurs, notre démonstration va utiliser la Conjecture Principale). Le résultat principal que nous obtenons (théorème 2.8) dit que, pour tout nombre premier impair p et tout caractère ψ de G, $\mathbb{Q}_p$-irréductible et d'ordre premier à p, $((U_K \otimes \mathbb{Z}_p)_\psi : (C_K \otimes \mathbb{Z}_p)_\psi)$ est p-adiquement équivalent à $c_{K,\psi} h_{K,\psi}$, où $c_{K,\psi} = (\mathbb{Z}_p[G]_\psi : (Iw(K) \otimes \mathbb{Z}_p)_\psi)$, si $\psi \neq 1$ (respectivement :
$c_{K,\psi} = c'_K(\mathbb{Z}_p[G]_\psi : (Iw(K) \otimes \mathbb{Z}_p)_\psi)$ si ψ est trivial).

Le cas $p = 2$ présente des difficultés techniques, mais pas de difficulté conceptuelle. Pour ne pas alourdir cet article, nous ne le traitons pas.

Un commentaire s'impose à ce stade : ce programme a déjà été réalisé par Kuz'min dans un long et difficile article [K 2] récemment paru. Il nous semble nécessaire de résumer la démarche de [K 2] pour montrer en quoi elle diffère de la nôtre : Kuz'min commence par faire la théorie d'Iwasawa des modules $\overline{C}_\infty$ et $\overline{U}_\infty/\overline{C}_\infty$, sans utiliser la formule de Sinnott (contrairement à [Gi 2] ou [V]). Pour redescendre au niveau de K, on prend classiquement les co-invariants par $\Gamma = \mathrm{Gal}(K_\infty/K)$, mais cette co-descente ne se fait pas exactement, d'où la nécessité pour Kuz'min de modifier le module $\overline{C}_\infty$ et de le remplacer par un module assez compliqué noté $C_S(K_\infty)$. Cependant il nous semble que la démonstration d'un théorème-clé de Kuz'min pour faire la co-descente sur $C_S(K_\infty)$ ([K 2] théorème 3.2) mérite d'être complétée ([K 2] p. 715). Kuz'min obtient un grand nombre de résultats intéressants sur des modules de co-descente, mais dans l'optique de raffiner la formule de Sinnott, le résultat essentiel est une formule de nombre de classes, p-adique et caractère par caractère ([K 2], théorème 7.2), qui est présentée comme l'aboutissement de toute la première partie de [K 2]. Or c'est une conséquence immédiate du corps de classes et de la Conjecture Principale (voir lemme 2.6 ci-dessous; Kuz'min utilise également la Conjecture Principale). A partir de cette formule p-adique, Kuz'min suit la méthode de Sinnott (qui est essentiellement formelle) pour en déduire les constantes $c_{K,\psi}$.

Notre démarche est inverse de celle de [K 2]. Nous calculons directement les constantes $c_{K,\psi}$ au niveau de K, par un raffinement de la méthode de Gillard ([Gi 1]). Le bonus est de pouvoir "expliquer" les divers facteurs parasites qui apparaissent, comme étant des "constantes structurelles" attachées aux divers modules. Des applications sont ensuite données à la théorie d'Iwasawa des unités circulaires et des unités semi-locales (essentiellement, des résultats asymptotiques de structure galoisienne). Enfin, nous proposons, dans l'esprit de [K 2], une modification des (p)-unités circulaires qui permet de donner des formules de co-descente sans facteur parasite.

La page qui suit contient une liste des notations utilisées dans toute la suite.

Remerciements : Nous remercions le rapporteur pour ses remarques pertinentes, qui nous ont permis d'améliorer une première version de cet article.

$p \neq 2$, un nombre premier fixé.

K, un corps de nombres abélien réel contenu dans une clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}}$ de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{C}$.

$\zeta_m = \exp(\frac{2i\pi}{m}) \in \overline{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{C}$, pour $m \in \mathbb{N},\ m \neq 1$.

G, le groupe de Galois de $K/\mathbb{Q}$.

P, le p-sous groupe de Sylow de G.

Δ, le supplémentaire de P dans G.

K_∞, la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique de K.

K_n, le sous-corps de K_∞ de degré p^n sur K.

$U^1_{n,v}$, pour $v \mid p$, le groupe des unités principales du complété $K_{n,v}$.

$\mu^1_{n,v}$, pour $v \mid p$, la torsion de $U^1_{n,v}$.

$\mathcal{U}_n := \prod_{v|p} U^1_{n,v}$, les unités semi-locales de K_n.

$\mathcal{K}_n := \Pi_{v|p} K_{n,v} \cong K_n \otimes \mathbb{Q}_p$.

O_L, l'anneau d'entiers (resp. de valuation) d'un corps de nombres (resp. corps local) L.

$\mathcal{O}_n := \Pi_{v|p} O_{K_{n,v}} \cong O_{K_n} \otimes \mathbb{Z}_p$, les entiers semi-locaux de K_n.

U_n, les unités globales de K_n.

$\epsilon_{K_n,m} := N_{\mathbb{Q}(\zeta_m)/K_n \cap \mathbb{Q}(\zeta_m)}(1-\zeta_m)$, pour $m \in \mathbb{N},\ m \neq 1$ (lorsque cela sera possible on ne précisera pas l'étage K_n, voir e.g. le lemme 1.14).

C_n, le module galoisien des unités circulaires (à la Sinnott) de K_n. Rappelons que C_n est précisément l'intersection de U_n avec le sous-module de $K_n^\times$ engendré par les $\epsilon_{K_n,m}$.

$Iw(K_n)$, le module d'Iwasawa associé à K_n (voir définition 2.1).

$\overline{A} = \varprojlim A/p^nA$, pour un groupe abélien A, son pro-p-complété (c'est-à-dire son complété pour la topologie dont une base d'ouverts est formée des sous-groupes d'indice fini égal à une puissance de p). Si A est de type fini sur $\mathbb{Z}$ (resp. $\mathbb{Z}_p$), $\overline{A} \cong A \otimes \mathbb{Z}_p$ (resp. $\overline{A} \cong A$). A partir d'ici, on identifie $\overline{C}_n$ et $\overline{U}_n$ avec leurs images respectives dans $\mathcal{U}_n$ (grâce à la validité de la Conjecture de Leopoldt sur K_n).

$(B : A)$, pour deux réseaux de même rang A et B dans un même espace vectoriel, désignera l'indice généralisé entre B et A (si $A \subset B$ cela coïncide avec l'indice usuel de A dans B).

$\Psi(H)$, pour un groupe H, l'ensemble des caractères $\mathbb{Q}_p$-irréductibles de H.

$\mathcal{D}(H)$, pour un groupe H, le groupe des caractères absolument irréductibles de H. Dans la suite les divers groupes H seront des groupes de Galois abéliens, et nous identifierons $\mathcal{D}(H)$ avec le sous-groupe des caractères de Dirichlet associés à H. Un $\chi \in \mathcal{D}(H)$ définit par linéarité un homomorphisme $\chi : \mathbb{Q}_p[H] \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}$.

$e_\phi = \frac{1}{\# H}\sum_{h\in H} \phi(h^{-1})h$, (resp. $e_\chi = \frac{1}{\# H}\sum_{h\in H} \chi(h^{-1})h$) pour $\phi \in \Psi(H)$ (resp. $\chi \in \mathcal{D}(H)$), l'idempotent de $\mathbb{Q}_p[H]$ (resp. $\overline{\mathbb{Q}_p}[H]$) qui correspond à ϕ (resp. χ).

$A_\chi = A_\phi = \mathbb{Z}_p[\chi(H)] \cong e_\phi\mathbb{Z}_p[H]$, pour $\chi \mid \phi,\ \chi \in \mathcal{D}(H),\ \phi \in \Psi(H)$. L'anneau $e_\phi\mathbb{Z}_p[H] \subset \mathbb{Q}_p[H]$ est un facteur direct de l'ordre maximal de $\mathbb{Q}_p[H]$, mais n'est pas toujours contenu dans $\mathbb{Z}_p[H]$.

1– Indice des unités circulaires dans les unités semi-locales.

Dans les deux premiers paragraphes, $n = 0$ et l'on omet de préciser l'indice n dans les notations qui précèdent. Par exemple, $\mathcal{K} = \mathcal{K}_0 = K \otimes \mathbb{Q}_p$, etc ...

1.1 Préparation algébrique.

Soit $\psi \in \Psi(\Delta)$. On a $e_\psi \in \mathbb{Z}_p[\Delta] \subset \mathbb{Z}_p[G]$. Si M est un $\mathbb{Z}_p[G]$-module, on notera souvent $M_\psi = e_\psi M$. Le module M s'écrit alors comme somme directe : $M = \bigoplus_{\psi\in\Psi(\Delta)} M_\psi$. Chaque module M_ψ est naturellement un $A_\psi[P]$-module, et la $\mathbb{Z}_p[G]$-structure d'un module M se lit sur la collection des $A_\psi[P]$-structures des M_ψ.

Pour $\psi \in \Psi(\Delta)$ on notera $\widetilde{\psi}$ le caractère de G à coefficients dans $\mathbb{Q}_p$ induit par ψ. Donc $\widetilde{\psi}$ est la trace de la représentation linéaire de G obtenue à partir du module $e_\psi\mathbb{Q}_p[G]$. Lorsque P est non trivial, $\widetilde{\psi}$ n'est pas irréductible. Tout caractère de $\mathcal{D}(G)$ divise un unique caractère $\widetilde{\psi}$ pour un unique ψ de $\Psi(\Delta)$.

Définition 1.1. *Soit M un $\mathbb{Z}_p[G]$-module. On note $\mathcal{S}(M)$ le* semi-simplifié *de M. C'est un sous-module de $M \otimes \mathbb{Q}_p$, contenant l'image naturelle de M modulo sa $\mathbb{Z}_p$-torsion (en général strictement), et défini par :*

$$\mathcal{S}(M) := \bigoplus_{\phi\in\Psi(G)} e_\phi M \subset M \otimes \mathbb{Q}_p \ .$$

$\mathcal{S}(M)$ est le plus petit module complètement décomposable contenant M modulo sa torsion. Sa structure galoisienne est sensiblement plus simple que celle de M. L'ordre associé à $\mathcal{S}(M)$ est l'ordre maximal de $\mathbb{Q}_p[G]$. Cet ordre est un produit direct d'anneaux principaux, et décrire la structure du module $\mathcal{S}(M)$ sur cet ordre revient à calculer les dimensions des $e_\phi M \otimes \mathbb{Q}_p$.

Lemme 1.2. *Soit M un $\mathbb{Z}_p[G]$-module sans $\mathbb{Z}_p$-torsion. Notons $M^{(0)}$ le noyau sur M de la trace algébrique $\mathrm{tr}_G(x) = \sum_g g\,x$, et M^G les éléments de M laissés fixes par G. On a :*
(i) $\mathcal{S}(M) = \bigoplus_{\psi\in\Psi(\Delta)} \mathcal{S}(M)_\psi = \bigoplus_{\psi\in\Psi(\Delta)} \mathcal{S}(M_\psi)$.
(ii) $\mathcal{S}(\mathcal{S}(M)) = \mathcal{S}(M)$.
Si l'on suppose en outre que $M = M^{(0)} \oplus M^G$ alors :
(iii) $\mathcal{S}(M^{(0)}) = \mathcal{S}(M)^{(0)}$
(iv) $(\mathcal{S}(M^{(0)}) : M^{(0)}) = (\mathcal{S}(M) : M)$

Remarque. *Dans toute la suite, l'indice $(\mathcal{S}(M) : M)$ jouera un rôle technique important. Par commodité, on l'appellera la* constante de structure *de M.*

Démonstration : (i) et (ii) sont des conséquences directes de la définition de $\mathcal{S}(M)$.

Pour (iii), l'inclusion $\mathcal{S}(M^{(0)}) \subset \mathcal{S}(M)^{(0)}$ est immédiate. Réciproquement, soit m un élément de $\mathcal{S}(M)^{(0)}$, il s'écrit : $m = \sum_\phi e_\phi m_\phi$. Alors $e_1 m_1 = 0$, puisque $m \in \mathcal{S}(M)^{(0)}$, et chaque m_ϕ est somme d'un invariant de M et d'un élément $m_{\phi,0} \in M^{(0)}$. On a donc pour tout $\phi \neq 1$: $e_\phi m_\phi = e_\phi m_{\phi,0} \in e_\phi M^{(0)}$. D'où (iii).

Pour (iv), on a $\mathrm{tr}_G(M) = \mathrm{tr}_G(e_1 M) = \mathrm{tr}_G(\mathcal{S}(M))$. Il suffit donc d'appliquer le lemme du serpent au diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & M^{(0)} & \longrightarrow & M & \xrightarrow{\mathrm{tr}_G} & \mathrm{tr}_G(M) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow \cap & & \downarrow \cap & & \downarrow \| & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{S}(M^{(0)}) = \mathcal{S}(M)^{(0)} & \longrightarrow & \mathcal{S}(M) & \longrightarrow & \mathrm{tr}_G(\mathcal{S}(M)) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

□

Définition 1.3. *On note $N = N_G := (\mathcal{S}(\mathbb{Z}_p[G]) : \mathbb{Z}_p[G])$ l'indice de $\mathbb{Z}_p[G]$ dans l'ordre maximal de $\mathbb{Q}_p[G]$, et pour tout $\psi \in \Psi(\Delta)$, on note $N_\psi = (\mathcal{S}(\mathbb{Z}_p[G]_\psi) : \mathbb{Z}_p[G]_\psi)$. On a évidemment $N = \prod N_\psi$.*

Définition 1.4. *On fixe un plongement de $\overline{\mathbb{Q}}$ dans $\overline{\mathbb{Q}_p}$. Cela définit une unique place w de K, divisant p, et un plongement de K_w dans $\overline{\mathbb{Q}_p}$. Pour toute place v de K divisant p, soit $\sigma_v : K_w \longrightarrow K_v$, l'unique K-isomorphisme entre ces deux complétés.*

(i) Soit s l'indice de décomposition de p dans K (i.e. le nombre de places v de K qui divisent p). Pour $(x_v)_{v|p} \in \mathcal{K}$, on pose : $\lambda((x_v)) = s^{-1} \sum_v \sigma_v^{-1}(x_v)$. Cela définit une application K- et $\mathbb{Q}_p$-linéaire $\lambda : \mathcal{K} \longrightarrow K_w$. En terme de produits tensoriels, λ est la tensorisée des inclusions $K \subset K_w$ et $\mathbb{Q}_p \subset K_w$.

(ii) Soit $\chi \in \mathcal{D}(G)$. On note T_χ l'homomorphisme $\mathbb{Q}_p$-linéaire $T_\chi : \mathcal{K} \longrightarrow K_w(\chi)$ défini par $T_\chi(x) = \sum_{g\in G} \chi(g^{-1})\lambda(g(x))$. Si l'on fait agir G via χ sur $K_w(\chi)$, T_χ est G-équivariant.

Lemme 1.5. *Soient L et M deux $\mathbb{Z}_p[G]$-modules contenus dans $\mathbb{Q}_p[G]$ ou dans $\mathcal{K}$ et tels que $(L : M)$ soit défini. Alors :*

(i) Pour tout $\phi \in \Psi(G)$, $e_\phi L$ et $e_\phi M$ sont des A_ϕ-modules libres de même rang (0 ou 1 simultanément).

(ii) On a la formule d'indice :

$$\begin{aligned}
(L : M) &= \prod_{\psi \in \Psi(\Delta)} \frac{(\mathcal{S}(M_\psi) : M_\psi)(\mathcal{S}(L)_\psi : \mathcal{S}(M)_\psi)}{(\mathcal{S}(L_\psi) : L_\psi)} \\
&= \prod_{\psi \in \Psi(\Delta)} \frac{(\mathcal{S}(M_\psi) : M_\psi)}{(\mathcal{S}(L_\psi) : L_\psi)} \prod_{\phi \in \Psi(G),\ \phi | \widetilde{\psi}} (e_\phi L : e_\phi M)
\end{aligned}$$

(iii) Lorsque L et M sont contenus dans $\mathbb{Q}_p[G]$, on a :

$$\forall\ \phi \in \Psi(G) \ : \quad (e_\phi L : e_\phi M) = \prod_{\chi \in \mathcal{D}(G),\ \chi | \phi} (\chi(L) : \chi(M))$$

(iv) Lorsque L et M sont contenus dans $\mathcal{K}$, on a :

$$\forall\ \phi \in \Psi(G) \ : \quad (e_\phi L : e_\phi M) = \prod_{\chi \in \mathcal{D}(G),\ \chi | \phi} (T_\chi(L) : T_\chi(M))$$

Démonstration : (i) est évident et (ii) est une conséquence de la multiplicativité des indices, du lemme 1.2 (ii) et de la définition de $\mathcal{S}(L)$. Pour (iii) les modules $e_\phi L$ et $e_\phi M$ sont isomorphes sur l'anneau principal A_ϕ. Il existe donc un $u \in \mathbb{Q}_p[G]$ tel que : $e_\phi M = u e_\phi L$. L'indice $(e_\phi L : e_\phi M)$ n'est rien d'autre que le déterminant de la multiplication par u dans $e_\phi \mathbb{Q}_p[G]$. De plus, dans $e_\phi \overline{\mathbb{Q}_p}[G]$, la matrice de la multiplication par u est diagonalisée par la base formée des idempotents e_χ. Cela donne (iii). En ce qui concerne (iv), $\mathcal{K}$ est isomorphe à $\mathbb{Q}_p[G]$ et les applications T_χ définissent des isomorphismes entre $e_\chi \mathcal{K} \subset \mathcal{K} \otimes \overline{\mathbb{Q}_p}$ et $e_\chi \overline{\mathbb{Q}_p}[G]$. (iv) se déduit donc de (iii). □

1.2 La méthode de Gillard appliquée aux unités circulaires.

Gillard dans [Gi 1] et [Gi 3] calcule les indices de divers groupes d'unités cyclotomiques, essentiellement construits à partir des "unités formelles" de Leopoldt. L'ordre associé à ces dernières unités est l'ordre maximal de $\mathbb{Q}[G]$ et leur constante structurelle vaut donc 1. Cela donne des formules d'indices complètement explicites, mais le "facteur parasite" est nettement moins bon que celui de Sinnott (à l'étage n il est divisible par $p^{n\#\Delta}$). Dans le sous-paragraphe qui suit, on applique la méthode de Gillard à C_K, en tenant compte de l'indice $(\mathcal{S}(\overline{C}_K):\overline{C}_K)$, et de la diversité des générateurs de C_K, qui fait intervenir les b_χ définis ci-dessous.

On fixe un $\psi \in \Psi(\Delta)$. Pour tout $\chi \in \mathcal{D}(G)$, on note f_χ son conducteur. Pour alléger les notations on omettra souvent l'indice $n=0$. Par exemple à partir d'ici $C = C_K = C_0$, etc...

Définition 1.6. *Pour tout nombre premier l divisant le conducteur $\mathrm{cond}(K)$ de K, on fixe un générateur g_l de $\mathrm{Gal}(K \cap \mathbb{Q}(\zeta_{l^\infty})/\mathbb{Q})$. Si m est un entier divisant $\mathrm{cond}(K)$, et divisible par f_χ on note :*

$$b_{(\chi,m)} = [K : K \cap \mathbb{Q}(\zeta_m)] \prod_{l|m} (1-\chi(l)^{-1}) \in \overline{\mathbb{Q}_p},$$

où le produit est pris sur les nombres premiers l qui divisent m. On note :

$$b_{(\chi,m,0)} = \begin{cases} b_{(\chi,m)} & \textit{si } m \textit{ est composé} \\ (1-\chi(g_l))b_{(\chi,m)} & \textit{si } m \textit{ est une puissance d'un seul nombre premier } l \end{cases}$$

Soit m_χ (resp. $m_{(\chi,0)}$) l'entier naturel tel que la valuation p-adique de $b_{(\chi,m_\chi)}$ (resp. de $b_{(\chi,m_\chi,0)}$) soit minimale.
On note $b_\chi := b_{(\chi,m_\chi)}$ (resp. $b_{(\chi,0)} := b_{(\chi,m_{(\chi,0)},0)}$).

Soit $\log_p\colon \mathbb{C}_p^\times \longrightarrow \mathbb{C}_p$ le logarithme d'Iwasawa (i.e. on a $\log_p(p)=0$). Pour chaque $v \mid p$, soit $\log_v = \sigma_v \circ \log_p \circ \sigma_v^{-1}$ et soit $\mathcal{L}og : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{K}$ l'homomorphisme produit des $\log_v$.

Définition 1.7. *Soient $x \in \mathbb{C}_p^\times$ et $y \in \mathbb{C}_p^\times$. On dit qu'ils sont p-adiquement équivalents, et on note $x \sim y$, lorsque xy^{-1} est une unité p-adique.*

Lemme 1.8 (lemme-clé). *Lorsque ψ est non trivial, on a :*

$$\mathcal{U}_\psi^{(0)} = \mathcal{U}_\psi \quad et \quad (\mathcal{U}_\psi : \overline{C}_\psi) \sim \frac{(\mathcal{S}(\mathcal{L}og(\overline{C})_\psi) : \mathcal{L}og(\overline{C})_\psi)}{N_\psi} \prod_{\chi|\widetilde{\psi}} b_\chi L_p(1,\chi)$$

Lorsque ψ est trivial, on a :

$$(\mathcal{U}_\psi : \overline{C}_\psi \oplus (1+p)^{\mathbb{Z}_p}) \sim \frac{[K:\mathbb{Q}](\mathcal{S}(\mathcal{L}og(\overline{C})_\psi) : \mathcal{L}og(\overline{C})_\psi)}{N_\psi} \prod_{\chi|\widetilde{\psi},\ \chi\neq 1} b_{(\chi,0)} L_p(1,\chi)$$

Démonstration : Si $\psi \neq 1$, l'égalité $\mathcal{U}_\psi^{(0)} = \mathcal{U}_\psi$ est évidente. Tout le reste de ce paragraphe va être consacré à la démonstration des formules d'indice. On pose $M_\psi = \overline{C}_\psi \oplus (1+p)^{\mathbb{Z}_p}$ si $\psi = 1$, $M_\psi = \overline{C}_\psi$ sinon. D'après le lemme 1.2 (iv) on a dans tous les cas l'égalité $(S(M_\psi):M_\psi) = (\mathcal{S}(\overline{C})_\psi : \overline{C}_\psi)$. Comme $p \neq 2$, le noyau de $\mathcal{L}og$ ne rencontre pas $\overline{C}$. On a donc :

$$\begin{aligned}(\mathcal{U}_\psi : M_\psi) &= \#\left(\prod_v \mu_v^1\right)_\psi (\mathcal{L}og(\mathcal{U})_\psi : \mathcal{L}og(M)_\psi)\\ &= \#\left(\prod_v \mu_v^1\right)_\psi \frac{(\mathcal{S}(\mathcal{O}_\psi) : \mathcal{S}(\mathcal{L}og(M)_\psi))(\mathcal{S}(\mathcal{L}og(M)_\psi) : \mathcal{L}og(M)_\psi)}{(\mathcal{S}(\mathcal{O}_\psi) : \mathcal{O}_\psi)(\mathcal{O}_\psi : \mathcal{L}og(\mathcal{U})_\psi)}\end{aligned}$$

Dans cette expression figurent l'indice du réseau logarithmique $(\mathcal{O}_\psi : \mathcal{L}og(\mathcal{U})_\psi)$, l'indice de structure de M_ψ, l'indice de structure de $\mathcal{O}_\psi$ et l'indice des semi-simplifiés. Le calcul de l'indice du réseau logarithmique est classique :

Lemme 1.9 ([Coa], [Gi 1]).

$$(\mathcal{O}_\psi : \mathcal{L}og(\mathcal{U})_\psi) \sim \prod_{\chi | \widetilde{\psi}} \left(1 - \frac{\chi(p)}{p}\right)^{-1} \# \left(\prod_v \mu_v^1\right)_\psi$$

□

Pour calculer les contributions de $\mathcal{O}_\psi$, on doit utiliser toutes les informations dont on dispose sur la structure galoisienne additive. Les deux résultats qui suivent ont été obtenus par Leopoldt dans une formulation moins agréable. On en donne ici la version "contemporaine" de Lettl ([Le 1] et [Le 2]). On introduit une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{D}(G)$, qui permet de décrire les idempotents agissant sur O_K (l'anneau des entiers de K).

Définition 1.10([Le 1]). *Soit $\chi \in \mathcal{D}(G)$ et $\eta \in \mathcal{D}(G)$. On dit que χ et η sont dans la même classe de ramification, et on note $\chi \mathcal{R} \eta$, lorsque :*

$$\prod_{l^2 | f_\chi} l^{v_l(f_\chi)} = \prod_{l^2 | f_\eta} l^{v_l(f_\eta)},$$

où le produit est pris sur les nombres premiers l dont le carré divise f_χ (resp. f_η) et v_l désigne comme toujours la valuation l-adique. On note $Ram(G)$ l'ensemble des classes de ramification. A chaque $R \in Ram(G)$, on associe :
un conducteur maximal $m_R = \max\{f_\chi, \chi \in R\}$, un corps $K_R = K \cap \mathbb{Q}(\zeta_{m_R})$, un idempotent rationnel $e_R = \sum_{\chi \in R} e_\chi \in \mathbb{Q}[G]$ et un entier $t_R = tr_{\mathbb{Q}(\zeta_{m_R})/K_R}(\zeta_{m_R})$. On pose :
$t = \sum_{R \in Ram(G)} t_R$.

Théorème 1.11 (Leopoldt).
(i) $O_K = \bigoplus_{R \in Ram(G)} \mathbb{Z}[G] e_R\, t$
(ii) Pour tout $\chi \in \mathcal{D}(G)$, soit $R_\chi \in Ram(G)$ sa classe d'équivalence et soit la somme de Gauss : $\tau(\chi^{-1}) = \sum_{a=1}^{a=f_\chi} \chi^{-1}(a)\zeta_{f_\chi}^a$. En appliquant l'isomorphisme $O_K \otimes \mathbb{Z}_p \cong \mathcal{O}$, on a : $T_\chi(t \otimes 1) = T_\chi(t_{R_\chi} \otimes 1) \sim [K : K_{R_\chi}]\tau(\chi^{-1})$.

Démonstration : (i) est le résultat principal de [Le 1] p.167, avec une très légère différence de notation : dans [Le 1], $\mathcal{D}$ désigne l'ensemble des m_R, qui est en bijection avec $Ram(G)$.
(ii) est une conséquence du lemme 2 de [Le 1], que Lettl attribue à Hasse. □

Théorème 1.12 (Lettl). *Soit T_p le sous-groupe d'inertie en p de K.*
(*i*) $\mathcal{O} \cong \mathbb{Z}_p[G] \otimes_{\mathbb{Z}_p[P\cap T_p]} \mathcal{S}(\mathbb{Z}_p[P\cap T_p])$
(*ii*) $(\mathcal{S}(\mathcal{O}_\psi):\mathcal{O}_\psi) = \frac{N_\psi}{(N_{P\cap T_p})^{(\dim\psi)(P:P\cap T_p)}}$

Démonstration : (*i*) est une semi-localisation du résultat local (théorème 1) de [Le 2] (cela revient à induire de $\mathrm{Gal}(K_w/\mathbb{Q}_p)$ à G le module O_{K_w}). Il faut aussi remarquer qu'on a seulement affaire à $P\cap T_p$ et non à T_p comme c'est énoncé dans [Le 2], puisque $T_p/P\cap T_p$ est d'ordre premier à p.

(*ii*) est une conséquence calculatoire de (*i*). □

En dehors des sommes de Gauss (qui seront compensées par les fonctions L_p) les quantités qui apparaissent dans les énoncés (*ii*) des théorèmes 1.11 et 1.12 se compensent entre elles. En effet, on a le :

Lemme 1.13.
$$\prod_{\chi\mid\widetilde{\psi}}[K:K_{R_\chi}] \sim \frac{(N_{P\cap T_p})^{(\dim\psi)[P:P\cap T_p]}}{N_\psi}$$

Démonstration : On peut extraire une démonstration concise et complète de ce résultat des paragraphes 2.3 et 3.3 de [Gi 1]. En quelques mots, la démarche consiste, partant du produit de gauche, à restreindre aux caractères de P, ce qui fait apparaître la puissance $\dim\psi$, puis à quotienter par $\mathcal{D}(P/(T_p\cap P))$, en utilisant le fait que le conducteur maximal m_{R_χ} associé à $\chi\in\mathcal{D}(P)$ ne change pas par multiplication par un caractère trivial sur $T_p\cap P$. Ce passage au quotient fait apparaître le produit des noyaux des caractères sur $T_p\cap P$ à la puissance attendue : $(\dim\psi)[P:P\cap T_p]$. Pour conclure, on utilise l'égalité entre ce produit (sans la puissance) et $N_{T_p\cap P}$, qui a lieu puisque $P\cap T_p$ est cyclique ([Gi 1] lemme 2, mais c'est un calcul de Hasse). □

Il reste à étudier la contribution de M_ψ. Ce n'est qu'à partir d'ici que notre démarche s'écarte de celle de Gillard, puisque nous utilisons les unités circulaires, dont la structure galoisienne est beaucoup plus complexe que celle des "unités formelles" de Leopoldt.

On dispose quand même d'une description "explicite" de M :

Lemme 1.14. *Soit $\epsilon_m := N_{\mathbb{Q}(\zeta_m)/\mathbb{Q}(\zeta_m)\cap K}(1-\zeta_m)$. Rappelons que $M_\psi = \overline{C}_\psi \oplus (1+p)^{\mathbb{Z}_p}$ si ψ est trivial, et $M_\psi = \overline{C}_\psi$ sinon.*

Si $\psi\neq 1$, M_ψ est engendré par les ${\epsilon_m}^{e_\psi}$, pour $m\in\mathbb{N}$, $m \mid \mathrm{cond}(K)$, $m\neq 1$.

Si $\psi = 1$, M_ψ est engendré par $1+p$ et les générateurs ${\epsilon_{(m,0)}}^{e_\psi}$ avec $\epsilon_{(m,0)} = \epsilon_m$ si m est composé, et $\epsilon_{(m,0)} = \epsilon_m^{(1-g_l)}$ si m est une puissance d'un seul nombre premier l.

Démonstration : Il est bien connu que les ϵ_m sont des unités si m est composé et des puissances (galoisiennes) de l'uniformisante en l : ϵ_{l^r} (pour r assez grand) si m est l-primaire. La valuation en l d'un produit de tels nombres provient uniquement du facteur $\epsilon_{l^r}^x$, qui doit par conséquent être une unité. Cela contraint x à être divisible par $(1-g_l)$. □

Pour calculer l'image de ces générateurs par T_χ, on procède en deux étapes :

étape 1. *Soit K_χ le sous-corps de K correspondant à χ. On a $b_{(\chi,f_\chi)} \sim [K:K_\chi]$ et de plus :*

(*i*) $T_\chi(\mathcal{L}og(\epsilon_{f_\chi})) \sim b_{(\chi,f_\chi)}\tau(\chi^{-1})\left(1-\frac{\chi(p)}{p}\right)^{-1} L_p(1,\chi)$, *et :*

(*ii*) $T_\chi(\mathcal{L}og(\epsilon_{(f_\chi,0)})) \sim b_{(\chi,f_\chi,0)}\tau(\chi^{-1})\left(1-\frac{\chi(p)}{p}\right)^{-1} L_p(1,\chi)$.

Démonstration de l'étape 1 :

(ii) se déduit directement de (i) et des définitions des $b_{\chi,m}$, $b_{\chi,m,0}$, ϵ_m et $\epsilon_{m,0}$.
(i) D'après [Wa] p. 63, on a l'évaluation de $L_p(1,\chi)$:

$$L_p(1,\chi) = -\left(1-\frac{\chi(p)}{p}\right)\frac{\tau(\chi)}{f_\chi}\sum_{a=1}^{a=f_\chi}\chi^{-1}(a)\log_p(1-\zeta_{f_\chi}^a).$$

En utilisant les notations s, λ et T_χ définies en 1.4, on calcule par équivalence p-adique :

$$\begin{aligned}
L_p(1,\chi) &\sim \left(1-\frac{\chi(p)}{p}\right)\frac{1}{\tau(\chi^{-1})}\sum_{a=1}^{a=f_\chi}\chi^{-1}(a)\log_p(1-\zeta_{f_\chi}^a)\\
&\sim \left(1-\frac{\chi(p)}{p}\right)\frac{1}{\tau(\chi^{-1})}\sum_{g\in \mathrm{Gal}(K_\chi/\mathbb{Q})}\chi^{-1}(g)\log_p(\epsilon_{f_\chi}^g)\\
&\sim \left(1-\frac{\chi(p)}{p}\right)\frac{1}{\tau(\chi^{-1})}\frac{1}{[K:K_\chi]}\sum_{g\in G}\chi^{-1}(g)\log_p(\epsilon_{f_\chi}^g)\\
&\sim \left(1-\frac{\chi(p)}{p}\right)\frac{1}{\tau(\chi^{-1})}\frac{1}{[K:K_\chi]}\sum_{g\in G}\frac{\chi^{-1}(g)}{s}\sum_{v|p}\sigma_v^{-1}\left(\log_v(\sigma_v(\epsilon_{f_\chi}^g))\right)\\
&\sim \left(1-\frac{\chi(p)}{p}\right)\frac{1}{\tau(\chi^{-1})}\frac{1}{[K:K_\chi]}\sum_{g\in G}\chi^{-1}(g)\lambda\left((\log_v(\sigma_v(\epsilon_{f_\chi}^g)))_{v|p}\right)\\
&\sim \left(1-\frac{\chi(p)}{p}\right)\frac{1}{\tau(\chi^{-1})}\frac{1}{[K:K_\chi]}T_\chi(\mathcal{L}og(\epsilon_{f_\chi})).
\end{aligned}$$

Ce qui donne (i). $\square$

étape 2. *Soit m divisant* $\mathrm{cond}(K)$. *Si f_χ ne divise pas m, alors on a :*
$T_\chi(\mathcal{L}og(\epsilon_m)) = T_\chi(\mathcal{L}og(\epsilon_{(m,0)})) = 0$.
Si f_χ divise m, on a :
(iii) $T_\chi(\mathcal{L}og(\epsilon_m)) = \frac{b_{(\chi,m)}}{b_{(\chi,f_\chi)}}T_\chi(\mathcal{L}og(\epsilon_{f_\chi}))$ *et*
(iv) $T_\chi(\mathcal{L}og(\epsilon_{(m,0)})) = \frac{b_{(\chi,m,0)}}{b_{(\chi,f_\chi,0)}}T_\chi(\mathcal{L}og(\epsilon_{f_\chi,0}))$.

Démonstration de l'étape 2 : La deuxième étape se montre en utilisant les relations de normes que satisfont les ϵ_m (voir par exemple [So 1], lemme 2.1). Les constantes $b_{(\chi,m)}$ (resp. $b_{(\chi,m,0)}$) ont été définies à partir de ces relations pour que (iii) et (iv) aient lieu. $\square$

Il s'ensuit que $T_\chi(M)$ est engendré sur l'algèbre $A_\chi = \mathbb{Z}_p[\chi(G)]$ par le $T_\chi(\epsilon_m)$ (resp. $T_\chi(\epsilon_{(m,0)})$), pour lequel la valuation p-adique de $b_{(\chi,m)}$ (resp. $b_{(\chi,m,0)}$) est minimale. On a donc, pour $\chi\neq 1$:

$$T_\chi(M) = \begin{cases} b_\chi\tau(\chi^{-1})\left(1-\dfrac{\chi(p)}{p}\right)^{-1}L_p(1,\chi)A_\chi & \text{si } \chi \mid \widetilde{\psi} \text{ et } \psi\neq 1\\[2ex] b_{(\chi,0)}\tau(\chi^{-1})\left(1-\dfrac{\chi(p)}{p}\right)^{-1}L_p(1,\chi)A_\chi & \text{si } \chi \mid \widetilde{\psi} \text{ et } \psi = 1.\end{cases}$$

Pour le caractère χ trivial, la seule contribution de M provient du générateur $(1+p)$. On a d'une part $T_1(\mathcal{O}) = [K:K_{R_1}]\mathbb{Z}_p$, tandis qu'un calcul direct donne d'autre part : $T_1(\mathcal{L}og(1+p)) \sim p[K:\mathbb{Q}]$. Ainsi pour $\chi = 1$, on a :

$(T_\chi(\mathcal{O}):T_\chi(\mathcal{L}og(M))) \sim p[K_{R_1}:\mathbb{Q}] \sim (1-\frac{\chi(p)}{p})^{-1}[K_{R_1}:\mathbb{Q}]$. En appliquant les lemmes 1.5 et 1.2 on obtient :

$$(\mathcal{S}(\mathcal{O}_\psi):\mathcal{S}(\mathcal{L}og(M)_\psi)) \sim \prod_{\chi|\widetilde{\psi}} \frac{b_\chi L_p(1,\chi)\left(1-\frac{\chi(p)}{p}\right)^{-1}}{[K:K_{R_\chi}]} \text{ si } \psi \neq 1 \text{ et}$$

$$(\mathcal{S}(\mathcal{O}_1):\mathcal{S}(\mathcal{L}og(M)_1)) \sim p\frac{[K:\mathbb{Q}]}{[K:K_{R_1}]} \prod_{\chi|\widetilde{1},\chi\neq 1} \frac{b_{(\chi,0)} L_p(1,\chi)\left(1-\frac{\chi(p)}{p}\right)^{-1}}{[K:K_{R_\chi}]} \text{ si } \psi = 1.$$

Le lemme 1.8 s'obtient en regroupant les formules qui précèdent. □

2– La constante de structure de $\overline{C}$

La formule de 1.8 n'est pas satisfaisante telle quelle, puisqu'elle fait intervenir la constante de structure de $\overline{C}$, qui peut a priori prendre toutes les valeurs "possibles". C'est d'ailleurs ce qui se produit effectivement lorsque G est cyclique d'ordre p^2, le premier cas non-trivial (voir proposition 2.9). Pour donner une traduction du facteur parasite, on est amené à introduire comme dans [Si 1] et [Si 2] le module $Iw(K)$, et à relier la constante c_K de Sinnott aux constantes du lemme 1.8 (indépendamment de [Si 2], bien sûr).

2.1 Lien entre $Iw(K)$ et C.

Définition 2.1 ([Si 1] et [Si 2]). *Pour tout $l \mid \mathrm{cond}(K)$, soit T_l le sous-groupe d'inertie en l de $K/\mathbb{Q}$. Soit $l^* \in \mathbb{Q}[G]$ la moyenne des Frobenius inverses de l dans K :*

$$l^* = \frac{\sum_{g \in T_l} g}{\# T_l}(l, K^{T_l}/\mathbb{Q})^{-1}$$

Soit $\alpha_m = tr_{K/K\cap\mathbb{Q}(\zeta_m)} \prod_{l|m}(1-l^*)$. Par définition, $Iw(K)$ est le sous $\mathbb{Z}[G]$-module de $\mathbb{Q}[G]$ engendré par tous les α_m.

Remarque. *Pour $m \neq 1$, $\alpha_m\ tr_G = 0$, tandis que $\alpha_1 = tr_G$. On a donc :*
$Iw(K) = Iw(K)^{(0)} \oplus Iw(K)^G$.

Proposition 2.2. *Soit $V(K)$ le sous $\mathbb{Z}[G]$-module de $K^\times$ engendré par les ϵ_m pour tous les entiers m tels que $m \mid \mathrm{cond}(K)$, $m \neq 1$. Il est bien connu que $V(K)^{(0)} = C$. En posant $f(\epsilon_m) = \alpha_m$ et $f(l) = 0$ (pour tout diviseur premier l de $\mathrm{cond}(K)$) on définit un homomorphisme surjectif f (G-équivariant) de $V(K)$ sur $Iw(K)^{(0)}$.*

Démonstration : Un calcul direct montre que les α_m vérifient les relations de traces suivantes :

$$tr_{K\cap\mathbb{Q}(\zeta_m)/K\cap\mathbb{Q}(\zeta_n)}\alpha_m = \prod_{l|m,\ l\nmid n}\left(1 - (l, K\cap\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q})^{-1}\right)\alpha_n,$$

pour tout $n \mid m$ et en prenant le produit sur les diviseurs premiers de m qui ne divisent pas n.

De plus $Iw(K)$ est sans $\mathbb{Z}$-torsion. Les présentations galoisiennes de $V(K)$ décrites dans [So 2] ou [Be] par exemple, montrent que les relations de normes entre les ϵ_m, analogues aux relations de traces ci-dessus, engendrent un sous-module de $\mathbb{Z}$-rang maximal dans le module des relations entre les ϵ_m. Cela montre que f est bien définie et G-équivariante. $\square$

Corollaire 2.3. *On dispose des suites exactes :*

$$0 \longrightarrow V(K)^G \longrightarrow V(K) \xrightarrow{f} Iw(K)^{(0)} \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow C \xrightarrow{f} Iw(K)^{(0)} \longrightarrow \bigoplus_{l|\mathrm{cond}(K)} \frac{\mathbb{Z}}{[K\cap\mathbb{Q}(\zeta_{l^\infty}):\mathbb{Q}]\mathbb{Z}} \longrightarrow 0$$

Démonstration : La première suite revient juste à calculer le noyau de f. Ce noyau contient forcément $V(K)^G$ puisque l'image de f est détruite par la trace absolue. D'autre part

$V(K)$ est sans $\mathbb{Z}$-torsion. Donc un raisonnement classique donne que $V(K)/V(K)^G$ est aussi sans $\mathbb{Z}$-torsion. En comparant les rangs sur $\mathbb{Z}$, à savoir $[K:\mathbb{Q}]-1$ pour $Iw(K)^{(0)}$ et $[K:\mathbb{Q}]-1+\#\{l \text{ premier}, \ l \mid \mathrm{cond}(K)\}$ pour $V(K)$ (voir [So 2]), on obtient l'égalité : $\ker f = V(K)^G = \oplus_{l|\mathrm{cond}(K)} l^{\mathbb{Z}}$. D'où la première suite.

La deuxième suite s'obtient en appliquant la trace à la première suite et en tenant compte des identités bien connues :

$$N_{K/\mathbb{Q}}(V(K)) = \bigoplus_l l^{[K:K\cap\mathbb{Q}(\zeta_{l^\infty})]\mathbb{Z}} \quad \text{et} \quad C = V(K)^{(0)}$$

□

Les suites du corollaire 2.3 permettent de relier l'indice :
$(\mathbb{Z}[G] : Iw(K))(\prod_l [K\cap\mathbb{Q}(\zeta_{l^\infty}) : \mathbb{Q}]) \ / \ [K:\mathbb{Q}]$ qui intervient dans [Si 2] avec les constantes apparaissant dans le lemme 1.8.

Proposition 2.4. *Soit $\psi \in \Psi(G)$. Si ψ est non trivial, alors :*

$$(\mathbb{Z}_p[G]_\psi : \overline{Iw(K)}_\psi) \sim \frac{(\mathcal{S}(\mathcal{L}og(\overline{C}_K)_\psi) : \mathcal{L}og(\overline{C}_K)_\psi)}{N_\psi} \prod_{\chi|\widetilde{\psi}} b_\chi .$$

Lorsque ψ est trivial, on a :

$$(\mathbb{Z}_p[G]_\psi : \overline{Iw(K)}_\psi) \frac{\prod_l [K\cap\mathbb{Q}(\zeta_{l^\infty}) : \mathbb{Q}]}{[K:\mathbb{Q}]} \sim \frac{(\mathcal{S}(\mathcal{L}og(\overline{C}_K)_\psi) : \mathcal{L}og(\overline{C}_K)_\psi)}{N_\psi} \prod_{\substack{\chi|\widetilde{\psi}\\ \chi\neq 1}} b_{(\chi,0)} .$$

Démonstration de 2.4 : Si ψ est non trivial, on a :

$$\overline{C}_\psi = \overline{V(K)}_\psi \overset{f}{\cong} (\overline{Iw(K)})_\psi^{(0)} = \overline{Iw(K)}_\psi \ .$$

D'autre part, on voit aisément, à partir de la définition des α_m, que pour tout χ de $\mathcal{D}(G)$, on a $\chi(\alpha_m) = b_{(\chi,m)}$. Le lemme 1.5 (ii) et (iii) donne donc directement la proposition, puisque la constante de structure de $\overline{Iw(K)}_\psi$ est égale à celle de $\overline{C}_\psi$.

Lorsque ψ est trivial, la deuxième suite exacte du corollaire 2.3 donne :
$\prod_l [K\cap\mathbb{Q}(\zeta_{l^\infty}) : \mathbb{Q}] \sim ((\overline{Iw(K)})_\psi^{(0)} : f(\overline{C})_\psi)$

En calculant ce dernier indice avec le lemme 1.5 et en utilisant le lemme 1.2 (iv), on obtient :

$$((\overline{Iw(K)})_\psi^{(0)} : f(\overline{C})_\psi) \sim \frac{(\mathcal{S}(\overline{C})_\psi : \overline{C}_\psi)}{(\mathcal{S}(\overline{Iw(K)})_\psi) : (\overline{Iw(K)})_\psi)} \prod_{\chi|\widetilde{\psi},\ \chi\neq 1} \frac{b_{(\chi,0)}}{b_\chi} .$$

On exprime ainsi la constante de structure associée à $\overline{Iw(K)}$ en fonction de celle associée à $\overline{C}$. On peut donc calculer l'indice $(\mathbb{Z}_p[G]_\psi : \overline{Iw(K)}_\psi)$ avec le lemme 1.5. On démontre la deuxième partie de la proposition en observant que, pour le caractère χ trivial, on a $\chi(\overline{Iw(K)}) = [K:\mathbb{Q}] \ \mathbb{Z}_p$. □

En combinant le lemme 1.8 et la proposition 2.4, on obtient le

Théorème 2.5. *Soit $\psi \in \Psi(\Delta)$. Si $\psi \neq 1$, on a :*

$$(\mathcal{U}_{K,\psi} : \overline{C}_{K,\psi}) \sim (\mathbb{Z}_p[G]_\psi : \overline{Iw(K)}_\psi) \prod_{\chi \mid \widetilde{\psi}} L_p(1,\chi) \ .$$

Si ψ est trivial, on a :

$$(\mathcal{U}_{K,\psi} : \overline{C}_{K,\psi} \oplus (1+p)^{\mathbb{Z}_p}) \sim (\mathbb{Z}_p[G]_\psi : \overline{Iw(K)}_\psi) \quad \prod_l [K \cap \mathbb{Q}(\zeta_{l^\infty}) : \mathbb{Q}] \prod_{\chi \mid \widetilde{\psi}, \chi \neq 1} L_p(1,\chi).$$

□

Ce théorème s'exprime aussi en termes d'unités globales et de groupe des classes, le passage d'une formulation à l'autre utilisant deux ingrédients classiques : le corps de classes et la Conjecture Principale. Montrons d'abord des formules de nombres de classes, p-adiques et caractère par caractère (c'est le théorème 7.2 de [K 2]) :

Lemme 2.6. *Soient a et b les entiers définis par $p^a \sim [\mathbb{Q}(\zeta_{p^\infty}) \cap K : \mathbb{Q}]$ et $p^b \sim [K_\infty \cap H_K : K]$. On a :*

$$h_\psi \sim \begin{cases} \dfrac{1}{(\mathcal{U}_\psi^{(0)} : \overline{U}_\psi)} \displaystyle\prod_{\chi \mid \widetilde{\psi}} L_p(1,\chi) \ \ si\ \psi \neq 1 \\ \dfrac{p^{a+b}}{(\mathcal{U}_\psi^{(0)} : \overline{U}_\psi)} \displaystyle\prod_{\chi \mid \widetilde{\psi}, \chi \neq 1} L_p(1,\chi) \ \ si\ \psi = 1. \end{cases}$$

Remarque. *Le facteur p^{a+b} est précisément l'indice de ramification sauvage de p dans K. C'est-à-dire $a = b = 0$ si p^2 ne divise pas $\mathrm{cond}(K)$, et $p^{a+b} \sim \mathrm{cond}(K)/p$ si p^2 divise $\mathrm{cond}(K)$.*

Démonstration : Soit M la p-extension abélienne non-ramifiée hors de p maximale de K. Soit $\mathfrak{X} = \mathrm{Gal}(M/K)$. Soit H_K le p-corps de Hilbert de K. D'après la théorie du corps de classes, on a la suite exacte relative à l'inertie :

$$0 \longrightarrow \frac{\mathcal{U}}{\overline{U}} \longrightarrow \mathfrak{X} \longrightarrow \mathrm{Gal}\,(H_K/K) \longrightarrow 0.$$

Concernant les sous-modules de $\mathbb{Z}_p$-torsion, d'après la conjecture de Leopoldt on a :

$$\mathrm{tor}\left(\frac{\mathcal{U}}{\overline{U}}\right) = \frac{\mathcal{U}^{(0)}}{\overline{U}} \quad \text{et} \quad \mathrm{tor}\,(\mathfrak{X}) = \mathrm{Gal}\,(M/K_\infty)\,.$$

Comme le passage aux ψ-composantes est exact pour $\psi \in \Psi(\Delta)$, et comme l'image de $\mathrm{tor}(\mathfrak{X})$ n'est autre que $\mathrm{Gal}(H_K/K \cap K_\infty)$, on obtient :

$$(\dagger) \qquad 0 \longrightarrow \left(\frac{\mathcal{U}^{(0)}}{\overline{U}}\right)_\psi \longrightarrow \mathrm{tor}\,(\mathfrak{X})_\psi \longrightarrow \mathrm{Gal}\,(H_K/H_K \cap K_\infty)_\psi \longrightarrow 0.$$

G agit trivialement sur $\mathrm{Gal}(K_\infty \cap H_K/K)$, on a donc :

$$h_\psi = \begin{cases} \#\,\mathrm{Gal}\,(H_K/H_K \cap K_\infty)_\psi & \text{si } \psi \neq 1 \\ p^b \#\,\mathrm{Gal}\,(H_K/H_K \cap K_\infty)_\psi & \text{si } \psi = 1. \end{cases}$$

D'après la "Conjecture Principale" de la théorie d'Iwasawa (démontrée dans [M W], voir aussi [Wil] et [Grei 1], ainsi que les calculs de [Gra 2]), on a :

$$\#\mathrm{tor}(\mathfrak{X})_\psi \sim \begin{cases} \displaystyle\prod_{\chi|\widetilde{\psi}} L_p(1,\chi) & \text{si } \psi \neq 1 \\ p^a \displaystyle\prod_{\chi|\widetilde{\psi},\ \chi\neq 1} L_p(1,\chi) & \text{si } \psi = 1. \end{cases}$$

Le lemme s'obtient en utilisant les deux formules qui précèdent et en appliquant la multiplicativité des ordres dans la suite (†). □

Faisons ici une digression sur les régulateurs p-adiques. Posons $E_\psi = \overline{U}_\psi \oplus (1+p)^{\mathbb{Z}_p}$ si $\psi = 1$ et $E_\psi = \overline{U}_\psi$ sinon. Nous ferons le calcul uniquement pour $\psi \neq 1$, le cas $\psi = 1$ étant analogue (pour des précisions voir la fin de la démonstration de 2.8). On a :

$$\begin{aligned} (\mathcal{U}_\psi : E_\psi) &= \#\left(\prod_v \mu_v^1\right)_\psi (\mathcal{L}og(\mathcal{U}_\psi) : \mathcal{L}og(E_\psi)) \\ &= \#\left(\prod_v \mu_v^1\right)_\psi \frac{(\mathcal{O}_\psi : \mathcal{L}og(E_\psi))}{(\mathcal{O}_\psi : \mathcal{L}og(\mathcal{U}_\psi))} \\ &= (\mathcal{O}_\psi : \mathcal{L}og(E_\psi)) \prod_{\chi|\widetilde{\psi}} \left(1 - \frac{\chi(p)}{p}\right) \text{ (d'après 1.9).} \end{aligned}$$

La somme des composés des T_χ avec les inclusions $K_w(\chi) \subset \mathbb{C}_p(\chi)$ fournit un plongement G-équivariant $\mathcal{K} \subset \mathbb{C}_p[G]$. Cela permet de définir, à la manière de Leopoldt, un *régulateur (p,ψ)-adique* $R_p(K)_\psi$ comme étant le covolume de $\mathcal{L}og(E_\psi)$ dans $\mathbb{Z}_p[G]_\psi$. En adaptant un calcul classique de discriminant ([Coa], lemme 5), on peut aussi interpréter le covolume de $\mathcal{O}_\psi$ dans $\mathbb{Z}_p[G]_\psi$ comme étant la "(p,ψ)-partie" de la racine carrée du discriminant, qu'on notera $|\mathrm{disc}(K)_\psi|^{\frac{1}{2}}$. Le quotient $R_p(K)_\psi/|\mathrm{disc}(K)_\psi|^{\frac{1}{2}}$ ne dépend plus du choix du plongement, et l'on obtient ainsi des formules de régulateurs qui sont des raffinements, caractère par caractère, de la formule p-adique de Leopoldt ([Wa], théorème 5.24) :

Corollaire 2.7. *Pour tout $\psi \in \Psi(\Delta)$, on a :*

$$h_\psi R_p(K)_\psi |\mathrm{disc}(K)_\psi|^{-\frac{1}{2}} \sim \prod_{\chi|\widetilde{\psi},\ \chi\neq 1} \left(1 - \frac{\chi(p)}{p}\right)^{-1} L_p(1,\chi)$$

(Comparer à [K 2], théorème 7.3).

On revient au théorème principal de cet article :

Théorème 2.8. *Soit $\psi \in \Psi(\Delta)$ et soit h_ψ la ψ-partie de la p-partie du nombre de classes de K. Si ψ est non trivial, on a :*

$$(\overline{U}_{K,\psi} : \overline{C}_{K,\psi}) \sim (\mathbb{Z}_p[G]_\psi : \overline{Iw(K)}_\psi) h_\psi \ .$$

Lorsque ψ est trivial, on a :

$$(\overline{U}_{K,\psi} : \overline{C}_{K,\psi}) \sim \frac{\prod_l [K \cap \mathbb{Q}(\zeta_{l^\infty}) : \mathbb{Q}]}{[K : \mathbb{Q}]} (\mathbb{Z}_p[G]_\psi : \overline{Iw(K)}_\psi) h_\psi \ .$$

Démonstration : Pour ψ non trivial, 2.8 suit immédiatement de 2.5, 2.6 et de la multiplicativité des indices.

Si ψ est le caractère trivial sur Δ, d'après le lemme 3 p. 341 de [Coa], on a : $N_{K/\mathbb{Q}}(\mathcal{U}) = (1+p)^{p^{a+b}\mathbb{Z}_p}$. Une simple application du lemme du serpent donne donc :

$$((\mathcal{U}^{(0)})_\psi : \overline{C}_\psi) \sim \frac{p^{a+b}}{[K : \mathbb{Q}]} (\mathcal{U}_\psi : \overline{C}_\psi \oplus (1+p)^{\mathbb{Z}_p}),$$

et l'on peut conclure comme pour le cas $\psi \neq 1$. $\square$

2.2 Constantes de Sinnott.

Dans la suite, on notera $c_{K,\psi}$ le facteur p-adique "parasite" qui apparaît ci-dessus, c'est-à-dire :

$$c_{K,\psi} \sim \begin{cases} (\mathbb{Z}_p[G]_\psi : \overline{Iw(K)}_\psi) \text{ si } \psi \neq 1 \\ (\mathbb{Z}_p[G]_\psi : \overline{Iw(K)}_\psi) \dfrac{\prod_l [K \cap \mathbb{Q}(\zeta_{l^\infty}) : \mathbb{Q}]}{[K : \mathbb{Q}]} \text{ si } \psi = 1. \end{cases}$$

$c_{K,\psi}$ est la "ψ-partie" de la p-partie du facteur parasite de [Si 1] et [Si 2]. Résumons ici quelques propriétés des constantes de Sinnott :

a) Dans les paragraphes 5 et 6 de [Si 2] notamment, Sinnott étudie $c''_K = (\mathbb{Z}[G] : Iw(K))$. Il y démontre que cette constante est un nombre entier et établit des restrictions sur les nombres premiers qui la divisent éventuellement. Précisément, si $q \neq 2$ est un nombre premier qui divise c''_K, alors :
(i) la q-partie de G n'est pas cyclique (en particulier $q^2 \mid \#G$).
(ii) $q \mid (\prod_l \#T_l)/\#G$ où l parcourt les nombres premiers rationnels (qui divisent $\mathrm{cond}(K)$) et T_l désigne le sous-groupe d'inertie de l dans G (en particulier cette constante est une puissance de 2 lorsque K est le sous-corps réel maximal d'un corps cyclotomique).

b) Sinnott démontre aussi la stabilisation asymptotique de c''_{K_n} dans la $\mathbb{Z}_p$-tour cyclotomique de K (la stabilisation de la constante : $c'_{K_n} = (\prod_l [K_n \cap \mathbb{Q}(\zeta_{l^\infty}) : \mathbb{Q}])/[K_n : \mathbb{Q}]$ est évidente).

c) Dans le cas "semi-simple" (i.e. $P = \{1\}$) les $c_{K,\psi}$ sont triviaux et l'énoncé 2.8 est donc équivalent, dans ce cas particulier, à la conjecture de Gras [Gra 1].

d) Notons enfin que les formules de 2.8 peuvent être vues comme des formules de régulateurs p-adiques. Plus précisément, définissons le *régulateur* (p,ψ)*-adique circulaire* $R_p^{\mathrm{cyc}}(K)_\psi$ en remplaçant $\overline{U}_\psi$ par $\overline{C}_\psi$ dans la définition de $R_p(K)_\psi$. Un lemme purement algébrique ([Wa], lemma 4.15) montre $(\overline{U}_\psi : \overline{C}_\psi) \sim R_p(K)_\psi / R_p^{\mathrm{cyc}}(K)_\psi$. Les formules 2.7 et 2.8 permettent alors d'écrire, pour tout $\psi \in \Psi(\Delta)$:

$$R_p^{\mathrm{cyc}}(K)_\psi \sim |\mathrm{disc}(K)_\psi|^{\frac{1}{2}} c_{K,\psi} \prod_{\chi \mid \widetilde{\psi},\ \chi \neq 1} \left(1 - \frac{\chi(p)}{p}\right)^{-1} L_p(1,\chi)$$

En fait, dans cette optique, le paragraphe 1 peut être considéré comme le calcul du régulateur (p,ψ)-adique circulaire en termes de constantes de structure.

2.3 Exemples de calcul des constantes b_χ, une application à la structure galoisienne de $\overline{C}$.

On veut des exemples non semi-simples (i.e. $P \neq 1$). Le cas où G est d'ordre p est trivial du point de vue des unités : celle-ci sont détruites par la norme et l'ordre agissant est tout simplement $\mathbb{Z}_p[\zeta_p]$. On s'intéresse donc au cas le plus simple suivant. On suppose que G est cyclique d'ordre p^2 (avec $p \neq 2$). Soit $L/\mathbb{Q}$ l'unique sous-extension non triviale de $K/\mathbb{Q}$. Pour éviter les complications sans intérêt liées à la différence entre les b_χ et les $b_{(\chi,0)}$, on suppose qu'au moins deux nombres premiers sont ramifiés dans L.

Proposition 2.9.
(i) $(\mathcal{S}(\overline{C}) : \overline{C}) = p^t$ *avec* $0 \leq t \leq p-1$
(ii) Soit $\mathcal{L}$ l'ensemble des nombres premiers l dont le groupe d'inertie dans $K/\mathbb{Q}$ est : $T_l = \mathrm{Gal}(K/L)$. Soit $s = \#\mathcal{L}$. On a :

$$t = 0 \textit{ si } \exists\, l \in \mathcal{L} \textit{ tel que } l \textit{ est décomposé dans } L$$
$$t = \max\{p-1-s, 0\} \textit{ sinon.}$$

(iii) $\overline{C} \cong \mathcal{S}(\mathbb{Z}_p[G]^{(0)}) \iff t = 0.$
(iv) $\overline{C} \cong \mathbb{Z}_p[G]^{(0)} \iff t = p-1 \iff s = 0 \iff C$ *est $\mathbb{Z}[G]$-monogène, et engendré par* $\epsilon_{\mathrm{cond}(K)}$.

Remarque. *Pour n'importe quel entier e, compris entre 0 et $p-1$, en utilisant (ii) et le théorème de Dirichlet sur les nombres premiers en progression arithmétique, on se convainc aisément de l'existence d'une infinité de corps K pour lesquels la constante t vaut e.*

Cependant, le comportement "typique" paraît être $\overline{C} = \mathcal{S}(\overline{C})$ puisque cela se produit dès qu'un $l \in \mathcal{L}$ est décomposé dans L, ou bien dès qu'au moins $p-1$ nombres premiers appartiennent à $\mathcal{L}$.

On admet momentanément (i) et (ii). Lorsque $t = 0$ l'isomorphisme est donné par l'inclusion $\overline{C} \subset \mathcal{S}(\overline{C}) \cong \mathcal{S}(\mathbb{Z}_p[G]^{(0)})$, ce dernier anneau étant semi-simple. L'implication réciproque de (iii) vient du lemme 1.2 (ii). Cela prouve (iii). $\square$

Pour (iv), on montre les implications :

$$(s=0) \overset{(1)}{\Rightarrow} \left(\epsilon_{\mathrm{cond}(K)} \text{ engendre } C\right) \overset{(2)}{\Rightarrow} \left(\overline{C} \cong \mathbb{Z}_p[G]^{(0)}\right) \overset{(3)}{\Rightarrow} (t = p-1) \overset{(4)}{\Rightarrow} (s=0)$$

(1) : C est engendré par $\epsilon_{\mathrm{cond}(K)}$ et $\epsilon_{\mathrm{cond}(L)}$ (voir [So 2]). De plus l'hypothèse $s = 0$ donne $\mathrm{cond}(L) = \mathrm{cond}(K)$, sauf si p est totalement ramifié dans $K/\mathbb{Q}$. Auquel cas, on a $\mathrm{cond}(K) = p\,\mathrm{cond}(L)$, et $p \mid \mathrm{cond}(L)$. Cela donne l'implication (1) avec : $\epsilon_{\mathrm{cond}(L)} = N_{K/L}(\epsilon_{\mathrm{cond}(K)}) \in \langle \epsilon_{\mathrm{cond}(K)} \rangle$.

L'implication (2) est immédiate et l'implication (4) est une conséquence visible de (ii).

(3) : On calcule l'indice :

$$(\mathcal{S}(\mathbb{Z}_p[G]^{(0)}) : \mathbb{Z}_p[G]^{(0)}] = \frac{(\mathcal{S}(\mathbb{Z}_p[G])^{(0)} : \mathbb{Z}_p[G]^{(0)})}{(\mathcal{S}(\mathbb{Z}_p[G])^{(0)} : \mathcal{S}(\mathbb{Z}_p[G]^{(0)}))}.$$

D'après Hasse (voir [Gi 1], par exemple) on a $N_G = p^{p+1} = (\mathcal{S}(\mathbb{Z}_p[G]) : \mathbb{Z}_p[G]]$. On remarque qu'ici les $\phi \in \Psi(G)$ sont rationnels. La p-partie de l'indice N_G calculé par Hasse est donc bien $(\mathcal{S}(\mathbb{Z}_p[G]) : \mathbb{Z}_p[G])$. Cependant c'est un fait général (et connu) que si ρ est un caractère $\mathbb{Q}$-irréductible d'un groupe G (abélien), on a :

$e_\rho \mathbb{Z}_p[G] = \bigoplus_{\phi \in \Psi(G),\ \phi | \rho} e_\phi \mathbb{Z}_p[G]$, ce qui donne $\mathcal{S}(\mathbb{Z}_p[G]) = \bigoplus_\rho e_\rho \mathbb{Z}[G] \otimes \mathbb{Z}_p$, en faisant parcourir à ρ l'ensemble des caractères $\mathbb{Q}$-irréductibles de G.

Le diagramme commutatif ci-dessous donne : $p^{p+1} = (\mathcal{S}(\mathbb{Z}_p[G])^{(0)} : \mathbb{Z}_p[G]^{(0)})$.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbb{Z}_p[G]^{(0)} \arrow[r] \arrow[d, "\cap"] & \mathbb{Z}_p[G] \arrow[r, "\mathrm{tr}_G"] \arrow[d, "\cap"] & \mathrm{tr}_G(\mathbb{Z}_p[G]) \arrow[r] \arrow[d, "\|"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{S}(\mathbb{Z}_p[G])^{(0)} \arrow[r] & \mathcal{S}(\mathbb{Z}_p[G]) \arrow[r] & \mathrm{tr}_G(\mathbb{Z}_p[G]) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

D'autre part, le choix d'un générateur g de G fournit la description $\mathbb{Z}_p[G]^{(0)} = (g-1)\mathbb{Z}_p[G]$. Ce même choix définit un isomorphisme $\mathcal{S}(\mathbb{Z}_p[G])^{(0)} \cong \mathbb{Z}_p[\zeta_p] \oplus \mathbb{Z}_p[\zeta_{p^2}]$. Par cet isomorphisme, $\mathcal{S}((g-1)\mathbb{Z}_p[G])$ s'envoie sur l'idéal $(1-\zeta_p)\mathbb{Z}_p[\zeta_p] \oplus (1-\zeta_{p^2})\mathbb{Z}_p[\zeta_{p^2}]$. Cela donne $(\mathcal{S}(\mathbb{Z}_p[G])^{(0)} : \mathcal{S}(\mathbb{Z}_p[G]^{(0)})] = p^2$. On obtient donc : $(\mathcal{S}(\mathbb{Z}_p[G]^{(0)}) : \mathbb{Z}_p[G]^{(0)}] = p^{p-1}$, ce qui démontre l'implication (3) ainsi que (iv). □

On montre (i) et (ii) en calculant explicitement $(\mathcal{S}(\overline{C}) : \overline{C})$. L'hypothèse sur la ramification dans L donne d'une part $\prod [K \cap \mathbb{Q}(\zeta_{l^\infty}) : \mathbb{Q}] = 1$, et d'autre part l'égalité pour tout χ de $\mathcal{D}(G)$: $b_{(\chi,0)} = b_\chi$.

De plus, pour G cyclique, la constante $(\mathbb{Z}_p[G] : \overline{Iw(K)})$ vaut 1 (c'est le théorème 5.3 de [Si 2]). En utilisant $p^{p+1} = N_G$, et la proposition 2.4, on obtient le

Lemme 2.10.

$$(\mathcal{S}(\overline{C}) : \overline{C}) \sim \frac{p^{p-1}}{\prod_{\chi \neq 1} b_\chi}$$

□

Maintenant, (ii) et (i) viennent du lemme suivant et de son corollaire :

Lemme 2.11. *Soit $\chi \in \mathcal{D}(G)$. Si χ est fidèle sur G, on a :*
$b_\chi = b_{(\chi,\mathrm{cond}(K))} = 1$.

Si χ est d'ordre p, alors on a :

$$b_\chi \sim \begin{cases} (1-\zeta_p)^{min\{s,p-1\}} & si\ \forall\ l \in \mathcal{L},\ \chi(l) \neq 1 \\ p \sim (1-\zeta_p)^{p-1} & si\ \exists\ l \in \mathcal{L},\ \chi(l) = 1 \end{cases}$$

Corollaire 2.12.

$$\prod_{\chi \neq 1} b_\chi \sim \begin{cases} p^{min\{s,p-1\}} & si\ \forall\ l \in \mathcal{L},\ l\ est\ inerte\ dans\ L \\ p^{p-1} & si\ \exists\ l \in \mathcal{L},\ l\ est\ décomposé\ dans\ L. \end{cases}$$

Démonstration du lemme : L'affirmation sur les caractères fidèles provient directement de la définition de b_χ (et a lieu dès que G est cyclique). On fixe un χ d'ordre p. Soit $m \in \mathbb{N}$ tel que $f_\chi \mid m \mid \mathrm{cond}(K)$. Si $m \neq \mathrm{cond}(K)$, alors $\mathbb{Q}(\zeta_m) \cap K = L$, et l'on voit, sur la définition des $b_{(\chi,m)}$, que $b_{(\chi,f_\chi)}$ divise $b_{(\chi,m)}$. On est donc amené à comparer $b_{(\chi,f_\chi)}$ et $b_{(\chi,\mathrm{cond}(K))}$. Dans notre cas cela se fait aisément puisque :

$$b_{(\chi,f_\chi)} = p \sim (1-\zeta_p)^{p-1} \text{ tandis que :}$$
$$b_{(\chi,\mathrm{cond}(K))} \sim \prod_{l \in \mathcal{L}} (1-\chi(l)) \ .$$

Le dernier produit vaut 0 si un élément de $\mathcal{L}$ est décomposé dans $L = K_\chi$. Si tous les l de $\mathcal{L}$ sont inertes dans L on a :

$$b_{(\chi,\mathrm{cond}(K))} \sim (1-\zeta_p)^s$$

Cela prouve le lemme. $\square$

Démonstration du corollaire : Seuls les $p-1$ caractères d'ordre p interviennent dans le produit des b_χ. Pour ces caractères, la valuation p-adique de b_χ ne dépend pas de χ et le corollaire découle du lemme avec $p \sim (1-\zeta_p)^{p-1}$. On en déduit aussi 2.9. $\square$

3– Idéaux de Fitting et structure galoisienne

On donne dans ce paragraphe quelques applications des théorèmes 2.5 et 2.8 à la théorie d'Iwasawa des unités semi-locales et des unités circulaires. Plus précisément, on passe aux limites projectives pour la norme le long de la tour K_∞/K, avec $K_\infty = \bigcup_{n\geq 0} K_n$. On pose $\mathcal{U}_\infty = \varprojlim \mathcal{U}_n$, $\overline{U}_\infty = \varprojlim \overline{U}_n$ et $\overline{C}_\infty = \varprojlim \overline{C}_n$.

Le jeu va essentiellement consister à comparer les modules $\mathcal{U}_n/\overline{C}_n$ et $\overline{U}_n/\overline{C}_n$ avec leurs homologues respectifs obtenus à partir de $\mathcal{U}_\infty/\overline{C}_\infty$ et $\overline{U}_\infty/\overline{C}_\infty$ par co-descente (i.e. en prenant les co-invariants par l'action de $\mathrm{Gal}(K_\infty/K_n)$).

Introduisons quelques notations supplémentaires.

On pose $\Gamma = \mathrm{Gal}(K_\infty/K)$, $\Gamma_n = \mathrm{Gal}(K_\infty/K_n)$, $\Lambda = \varprojlim \mathbb{Z}_p[\Gamma/\Gamma_n] \cong \mathbb{Z}_p[[T]]$ et pour tout ψ de $\Psi(\Delta)$: $\Lambda_\psi = e_\psi\Lambda[\Delta] \cong A_\psi[[T]]$. Où comme toujours A_ψ est défini, après le choix d'un $\chi \in \mathcal{D}(\Delta)$ divisant ψ, par : $A_\psi = \mathbb{Z}_p[\chi] \cong e_\psi\mathbb{Z}_p[\Delta]$.

Soit M_n la p-extension abélienne, non ramifiée hors de p, maximale de K_n. Soit H_n le p-corps de Hilbert de K_n. On note $\mathfrak{X}_n = \mathrm{Gal}(M_n/K_n)$, $X_n = \mathrm{Gal}(H_n/K_n)$, $\mathfrak{X}_\infty = \varprojlim \mathfrak{X}_n$ et $X_\infty = \varprojlim X_n$, les limites projectives étant prises pour les restrictions des K-homomorphismes (ces restrictions correspondent aux normes par le corps de classes).

Il est bien connu que les Λ_ψ-modules $(\mathfrak{X}_\infty)_\psi$ et $(X_\infty)_\psi$ sont de torsion et que $(\mathfrak{X}_\infty)_\psi$ n'a pas de sous-module fini non nul. Regroupons dans un théorème les résultats (de nature plus arithmétique) concernant les modules associés aux unités, aux unités semi-locales et aux unités circulaires au niveau infini :

Théorème 3.1. *Soit ψ un caractère non trivial de $\Psi(\Delta)$. Alors :*

(i) Les Λ_ψ-modules $(\mathcal{U}_\infty/\overline{C}_\infty)_\psi$ et $(\overline{U}_\infty/\overline{C}_\infty)_\psi$ sont de Λ_ψ-torsion et n'ont pas de sous-module fini non nul.

(ii) Les Λ_ψ-modules $(\mathcal{U}_\infty/\overline{C}_\infty)_\psi$ et $(\mathfrak{X}_\infty)_\psi$ (resp. $(\overline{U}_\infty/\overline{C}_\infty)_\psi$ et $(X_\infty)_\psi$) ont même série caractéristique.

Démonstration : Ces résultats sont "bien connus", et dûs essentiellement à Iwasawa [I] dans le cas cyclotomique, Gillard [Gi 2] dans le cas abélien semi-simple, Villemot [V] dans le cas abélien général. Voir aussi [Grei 1], [T]. Notons que [V], [Grei 1] et [T] traitent aussi le cas d'un caractère ψ d'ordre quelconque (non nécessairement d'ordre premier à p). Pour la commodité du lecteur, mais aussi parce que [V] comporte une erreur (p.7, voir remarque ci-dessous), nous redonnons le schéma de la démonstration de (ii) suivant [V] :

En utilisant la théorie de Coleman sur la sous-extension maximale de $K/\mathbb{Q}$ non ramifiée en p, [Gi 2] et [V] montrent que la série caractéristique de $(\mathcal{U}_\infty/\overline{C}_\infty)_\psi$ divise la série $F_\psi(T)$ qui est associée aux fonctions $L_p(s,\chi)$ de Kubota-Leopoldt. Or la Conjecture Principale ([M W],[Wil]) dit que $F_\psi(T)$ est la série caractéristique du module $(\mathfrak{X}_\infty)_\psi$. Pour conclure à l'égalité des séries caractéristiques de $(\mathcal{U}_\infty/\overline{C}_\infty)_\psi$ et $(\mathfrak{X}_\infty)_\psi$, il suffit d'appliquer l'équivalence p-adique $(\mathcal{U}^{(0)}_{n,\psi} : \overline{C}_{n,\psi}) \sim c_{K_n,\psi}\#(\mathfrak{X}_n)_\psi$ (voir 2.5) et la stabilisation asymptotique des $c_{K_n,\psi}$.

L'égalité des séries caractéristiques de $(\overline{U}_\infty/\overline{C}_\infty)_\psi$ et $(X_\infty)_\psi$ résulte alors de la suite exacte du corps de classes :

$$0 \longrightarrow (\overline{U}_\infty/\overline{C}_\infty)_\psi \longrightarrow (\mathcal{U}_\infty/\overline{C}_\infty)_\psi \longrightarrow (\mathfrak{X}_\infty)_\psi \longrightarrow (X_\infty)_\psi \longrightarrow 0. \qquad \square$$

Pour tout $n \geq 0$, notons $(\ .\ )^{\Gamma_n}$ (resp. $(\ .\ )_{\Gamma_n}$) les invariants (resp. co-invariants) par Γ_n.

Corollaire 3.2. *Soit $\psi \in \Psi(\Delta)$, non trivial. Pour tout $n \geq 0$, on a :*
(*i*) $\#(\mathcal{U}_\infty/\overline{C}_\infty)_{\psi,\Gamma_n} = \#(\mathfrak{X}_n)_\psi$
(*ii*) $\#(\overline{U}_\infty/\overline{C}_\infty)_{\psi,\Gamma_n} = ((\overline{U}_\infty)_{\psi,\Gamma_n} : (\overline{C}_\infty)_{\psi,\Gamma_n}) = \frac{\#(X_\infty)_{\psi,\Gamma_n}}{\#(X_\infty)_\psi^{\Gamma_n}}$

Démonstration : On sait que la conjecture de Leopoldt pour K_n est équivalente à la finitude, donc à la nullité de $\mathfrak{X}_\infty^{\Gamma_n}$. D'après 3.1 (*i*) et 3.1 (*ii*) elle entraîne la nullité de $(\mathcal{U}_\infty/\overline{C}_\infty)_\psi^{\Gamma_n}$. L'égalité des séries caractéristiques implique alors, d'après une formule classique ([Coa]), l'égalité $\#(\mathcal{U}_\infty/\overline{C}_\infty)_{\psi,\Gamma_n} = \#(\mathfrak{X}_\infty)_{\psi,\Gamma_n}$. Or, $(\mathfrak{X}_\infty)_{\psi,\Gamma_n}$ est isomorphe à $(\mathfrak{X}_n)_\psi$, d'où (*i*).

La démonstration de (*ii*) est analogue : $(X_\infty)_\psi^{\Gamma_n}$ est fini (conjecture de Gross, qui est une conséquence de la conjecture de Leopoldt pour un corps totalement réel), d'où, d'après 3.1, l'égalité $\#(\overline{U}_\infty/\overline{C}_\infty)_{\psi,\Gamma_n} = \#(X_\infty)_{\psi,\Gamma_n}/\#(X_\infty)_\psi^{\Gamma_n}$. De la suite exacte tautologique :

$$0 \longrightarrow (\overline{C}_\infty)_\psi \longrightarrow (\overline{U}_\infty)_\psi \longrightarrow (\overline{U}_\infty/\overline{C}_\infty)_\psi \longrightarrow 0,$$

on déduit, par le lemme du serpent, une autre suite exacte :

$$(\overline{U}_\infty/\overline{C}_\infty)_\psi^{\Gamma_n} = 0 \longrightarrow (\overline{C}_\infty)_{\psi,\Gamma_n} \longrightarrow (\overline{U}_\infty)_{\psi,\Gamma_n} \longrightarrow (\overline{U}_\infty/\overline{C}_\infty)_{\psi,\Gamma_n} \longrightarrow 0$$

Cela termine la démonstration du corollaire. □

Remarque. *Ne disposant pas des formules d'indice caractère par caractère (2.5 et 2.8), [V] est obligé de faire un calcul asymptotique p-adique de $(\mathcal{U}_n^{(0)} : \overline{C}_n)$ en utilisant la formule du résidu de Leopoldt et la formule d'indice globale de Sinnott. Ce faisant, il écrit la décomposition $p^r\mathcal{U}_n = \oplus_{\phi\in\Psi(G)} p^r e_\phi \mathcal{U}_n$, où p^r divise exactement $\#G$, et les e_ϕ sont les idempotents usuels de $\mathbb{Q}_p[G]$. Mais $e_\phi\mathcal{U}_n$ n'est pas forcément un sous-module de $\mathcal{U}_n$!*

Par co-descente, c'est-à-dire en prenant les co-invariants par Γ_n, on obtient des homomorphismes naturels :

$$\alpha_{n,\psi} : \Big((\mathcal{U}_\infty/\overline{C}_\infty)_\psi\Big)_{\Gamma_n} \longrightarrow \Big(\mathcal{U}_n^{(0)}/\overline{C}_n\Big)_\psi$$

$$\text{et}\ \ \beta_{n,\psi} : \Big((\overline{U}_\infty/\overline{C}_\infty)_\psi\Big)_{\Gamma_n} \longrightarrow (\overline{U}_n/\overline{C}_n)_\psi\,,$$

qui peuvent donner des renseignements sur la structure galoisienne des modules au niveau n. Mais notons tout de suite qu'il faut écarter un cas particulier, où le comportement en $s = 0$ des fonctions $L_p(s,\chi)$ peut annuler ces homomorphismes ([Gi 2], théorème 2). C'est le cas suivant : tout ψ de $\Psi(\Delta)$ définit un unique caractère de $\Psi(\mathrm{Gal}(K^P/\mathbb{Q}))$; choisissons un χ de $\mathcal{D}(\mathrm{Gal}(K^P/\mathbb{Q}))$ divisant ce dernier caractère (dans le but d'obtenir un caractère de Dirichlet au sens habituel). La condition : "$\chi(p) = 1$" ne dépend pas du choix de χ, et équivaut à : "p se décompose complètement dans le sous-corps de K^P laissé fixe par $\ker\chi$". Il faut dans ce cas remplacer $\mathcal{U}_n$ par $\overline{\mathcal{K}_n^\times}$, $\overline{U}_n$ par les (p)-unités globales, et $\overline{C}_n$ par un module de normes universelles, peut-être dans le style de [So 1]. Nous espérons y revenir ultérieurement. Dans toute la suite, on ne traitera que le cas $\psi(p) \neq 1$, notation (pas très orthodoxe) pour signifier que $\chi(p) \neq 1$, où χ est choisi comme ci-dessus.

Une première application concerne les idéaux de Fitting, et généralise un résultat de Cornacchia ([Cor], théorème 2) :

Théorème 3.3. *Soit ψ un caractère de $\Psi(\Delta)$, tel que $\psi(p) \neq 1$. Alors, pour tout $n \geq 0$, $c_{K_n,\psi} \sim 1$ et les modules $(\mathcal{U}_n^{(0)}/\overline{C}_n)_\psi$ et $(\mathfrak{X}_n)_\psi$ ont même idéal de Fitting sur l'algèbre $A_\psi[\Gamma/\Gamma_n]$.*

Démonstration : Donnons tout d'abord une expression de $c_{K_n,\psi}$ en termes de l'application $\alpha_{n,\psi}$ (expression qui a lieu avec ou sans l'hypothèse $\psi(p) \neq 1$).

Lemme 3.4. *Pour tout ψ non trivial de $\Psi(\Delta)$, on a :*
$\#\operatorname{coker}\alpha_{n,\psi}/\#\ker\alpha_{n,\psi} \sim c_{K_n,\psi}$.

Démonstration du lemme : On a évidemment :
$\#\operatorname{coker}\alpha_{n,\psi}/\#\ker\alpha_{n,\psi} = \#(\mathcal{U}_n^{(0)}/\overline{C}_n)_\psi/\#(\mathcal{U}_\infty/\overline{C}_\infty)_{\psi,\Gamma_n}$. Or $\#(\mathcal{U}_\infty/\overline{C}_\infty)_{\psi,\Gamma_n}$ a été calculé en 3.2, et $\#(\mathcal{U}_n^{(0)}/\overline{C}_n)_\psi$ en 2.5 . □

Revenons à la démonstration de 3.3. Soit S_n l'ensemble des places de K_n qui divisent p, soit $D \subset \mathrm{Gal}(K_n/\mathbb{Q})$ le groupe de décomposition de p, et soit $L = K_n^D$. La théorie du corps de classes local donne la suite exacte :

$$\mathcal{U}_\infty \xrightarrow{\widetilde{\alpha}_n} \mathcal{U}_n \xrightarrow{N_{K_n/L}} \mathbb{Z}_p[S_n], \text{ avec l'action usuelle de } \mathrm{Gal}(K_n/\mathbb{Q}) \text{ sur } S_n.$$

Cette action se factorise par $\mathrm{Gal}(K_n/\mathbb{Q})/D$. L'hypothèse $\psi(p) \neq 1$ entraîne $D \cap \ker\chi \neq \{1\}$, et donc $e_\psi\mathbb{Z}_p[S_n] = 0$. On en tire la surjectivité de $\widetilde{\alpha}_{n,\psi}$, puis celle de $\alpha_{n,\psi}$. D'après 3.4 et la p-intégralité de $c_{K_n,\psi}$ (voir le **a)** du sous-paragraphe 2.2), on en déduit que $\#\ker\alpha_{n,\psi} \sim c_{K_n,\psi} \sim 1$, c'est-à-dire que $\alpha_{n,\psi}$ est un isomorphisme. Il reste alors à montrer que $\left((\mathcal{U}_\infty/\overline{C}_\infty)_\psi\right)_{\Gamma_n}$ et $\left((\mathfrak{X}_\infty)_\psi\right)_{\Gamma_n}$ ont même idéal de Fitting sur $R_n = A_\psi[\Gamma/\Gamma_n]$. D'après 3.1 (i), on a des suites exactes :

$$0 \to \Lambda_\psi^r \to \Lambda_\psi^r \to (\mathcal{U}_\infty/\overline{C}_\infty)_\psi \to 0 \qquad \text{et} \qquad 0 \to \Lambda_\psi^s \to \Lambda_\psi^s \to (\mathfrak{X}_\infty)_\psi \to 0$$

qui montrent, en tenant compte de 3.1 (ii), que :

$$\mathrm{Fitt}_{\Lambda_\psi}(\mathcal{U}_\infty/\overline{C}_\infty)_\psi = \mathrm{Fitt}_{\Lambda_\psi}(\mathfrak{X}_\infty)_\psi = (F_\psi),$$

où (F_ψ) désigne l'idéal engendré par la série caractéristique commune F_ψ. En appliquant le lemme du serpent, les mêmes calculs que dans la preuve de 3.2 donnent les suites exactes :

$$0 \to R_n^r \to R_n^r \to \left((\mathcal{U}_\infty/\overline{C}_\infty)_\psi\right)_{\Gamma_n} \to 0 \qquad \text{et} \qquad 0 \to R_n^s \to R_n^s \to \left((\mathfrak{X}_\infty)_\psi\right)_{\Gamma_n} \to 0$$

D'où l'égalité des idéaux de Fitting cherchés : ils sont égaux à la projection de (F_ψ) dans R_n. □

Remarque. *Rappelons que $G = P \times \Delta$. Supposons en outre que $\mathrm{Gal}(K_\infty/\mathbb{Q}) \cong G \times \Gamma$ (c'est automatique si P est trivial, mais ça ne l'est pas en général), de sorte que P opère naturellement sur tous les modules galoisiens qu'on est en train d'étudier. On s'intéresse alors à des invariants plus fins, qui sont les idéaux de Fitting de $(\mathcal{U}_n^{(0)}/\overline{C}_n)_\psi$ et $(\mathfrak{X}_n)_\psi$ sur l'algèbre $A_\psi[P]$ et qui interviennent par exemple dans l'étude des conjectures de Chinburg ([Grei 2], [B B]). Des résultats partiels ont été obtenus par Greither, et par Bley et Burns dans des cas particuliers où le conducteur de K possède au plus deux diviseurs premiers. On peut essayer de les généraliser en appliquant la méthode de la démonstration de 3.3, mais il faut bien sûr ajouter des hypothèses supplémentaires pour s'assurer que les modules* *étudiés sont de dimension projective inférieure ou égale à 1 (hypothèses qui interviennent également dans [Grei 2] et dans [B B]). Nous n'entrons pas dans les détails.*

Notre seconde application va concerner la structure galoisienne asymptotique (i.e. pour $n \gg 0$) des modules $X_n = \mathrm{Gal}(H_n/K_n)$, où H_n est le p-corps de Hilbert de K_n. Par le corps de classes, X_n est isomorphe au p-groupe de classes de K_n. Le théorème suivant généralise des résultats de [K S],[O 1], [O 2], etc...

Théorème 3.5. *Pour tout caractère ψ de $\Psi(\Delta)$ tel que $\psi(p) \neq 1$, et pour tout $n \gg 0$, la conjecture de Greenberg entraîne l'existence d'un isomorphisme canonique de modules galoisiens $(X_n)_\psi \xrightarrow{\sim} (\overline{U}_n/\overline{C}_n)_\psi$.*

Remarque. *Il est bien connu que l'égalité $\#X_n = (\overline{U}_n : \overline{C}_n)$ ne résulte pas en général d'un isomorphisme $X_n \xrightarrow{\sim} \overline{U}_n/\overline{C}_n$.*

Démonstration : On rappelle que la conjecture de Greenberg [Gree] pour K_∞/K prédit que le Λ-module X_∞ est fini (de façon équivalente : les invariants λ et μ associés sont nuls). Elle équivaut aussi à la finitude de $(X_\infty)_\psi$ pour tout ψ de $\Psi(\Delta)$ et, d'après 3.1, elle entraîne que $(\overline{U}_\infty)_\psi = (\overline{C}_\infty)_\psi$ pour tout ψ non trivial (alternativement voir [K N F]). Notons I_n (resp. I_∞) le sous-groupe de $\mathfrak{X}_n$ (resp. $\mathfrak{X}_\infty$) engendré par les groupes d'inertie en toutes les places divisant p. D'après le corps de classes, on a un diagramme commutatif aux lignes exactes :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \left((\overline{U}_\infty/\overline{C}_\infty)_\psi\right)_{\Gamma_n} \arrow[r] \arrow[d, "\beta_{n,\psi}"] & \left((\mathcal{U}_\infty/\overline{C}_\infty)_\psi\right)_{\Gamma_n} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_{n,\psi}"] & \left((I_\infty)_\psi\right)_{\Gamma_n} \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_{n,\psi}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \left(\overline{U}_n/\overline{C}_n\right)_\psi \arrow[r] & \left(\mathcal{U}_n^{(0)}/\overline{C}_n\right)_\psi \arrow[r] & I_{n,\psi} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

(l'exactitude à gauche de la suite du haut provient de la conjecture de Leopoldt, puisque $(I_\infty)^{\Gamma_n} \subset (\mathfrak{X}_\infty)^{\Gamma_n} = 0$). En écrivant le lemme du serpent pour l'action de Γ_n sur la suite exacte :

$$0 \longrightarrow I_\infty \longrightarrow \mathfrak{X}_\infty \longrightarrow X_\infty \longrightarrow 0$$

et en faisant une chasse dans le diagramme, on voit immédiatement que $\ker \gamma_{n,\psi} \cong (X_\infty)_\psi^{\Gamma_n}$ (et aussi $\operatorname{coker} \gamma_{n,\psi} \cong \ker\left(((X_\infty)_\psi)_{\Gamma_n} \longrightarrow (X_n)_\psi\right)$, mais on n'en n'a pas besoin ici). D'autre part, on a vu que sous l'hypothèse : $\psi(p) \neq 1$, l'homomorphisme $\alpha_{n,\psi}$ est un isomorphisme. La conjecture de Greenberg et le lemme du serpent appliqué au diagramme commutatif précédent donnent alors un isomorphisme canonique $(X_\infty)_\psi^{\Gamma_n} \xrightarrow{\sim} (\overline{U}_n/\overline{C}_n)_\psi$. Comme $X_\infty = \varprojlim X_n$, et que les restrictions sont surjectives pour $n \gg 0$, la finitude de X_∞ entraîne l'isomorphisme $(X_\infty)_\psi^{\Gamma_n} \cong (X_n)_\psi$ à partir d'un certain rang. $\square$

Remarque. *Le rapporteur nous signale qu'on peut donner une preuve alternative de 3.5 en utilisant les résultats de capitulation de [G J]. C'est aussi le point de départ de [K S],[O1], et [O2]. En effet la finitude de X_∞ implique la capitulation des X_n dans la tour K_∞/K_n. D'autre part l'hypothèse $\psi(p) \neq 1$ entraîne en particulier que la ψ-composante de la ramification dans la tour (les idéaux ambiges de K_∞ modulo les étendus de ceux de K_n) est triviale; donc accessoirement, que les unités (toujours pour la ψ-partie) sont normes dans la tour K_∞/K_n. La suite exacte des classes ambiges écrite pour les ψ-composantes dans K_m/K_n donne donc d'un côté $X_{n,\psi} \simeq H^1(\Gamma_n, \overline{U}_{m,\psi})$ et de l'autre $X_{n,\psi} \simeq H^0(\Gamma_n, \overline{U}_{m,\psi})$; de sorte que $X_{n,\psi}$ est tout naturellement un quotient de $\overline{U}_{n,\psi}$.*

4– (p)-unités circulaires modifiées

On a vu au paragraphe 3 que les unités circulaires présentent un certain nombre d'inconvénients pour la (co)-descente en théorie d'Iwasawa. Outre les difficultés liées à la décomposition (comme dans le théorème 3.3), l'un des inconvénients sérieux est que le module de co-descente $(\overline{C}_\infty)_{\Gamma_n}$ n'est pas un sous-module de $\overline{C}_n$: en effet, la nullité de $(\overline{U}_\infty/\overline{C}_\infty)^{\Gamma_n}$ et le lemme du serpent donnent un isomorphisme $(\overline{U}_\infty/\overline{C}_\infty)_{\Gamma_n} \cong (\overline{U}_\infty)_{\Gamma_n}/(\overline{C}_\infty)_{\Gamma_n}$, mais $(\overline{U}_\infty)_{\Gamma_n}$ ne peut pas s'injecter dans $\overline{U}_n$ pour une question de $\mathbb{Z}_p$-rangs. On se propose dans ce paragraphe de modifier la définition des unités circulaires (dans l'esprit de [K 2], mais avec des simplifications) afin d'obtenir de bonnes formules de descente.

D'abord quelques notations supplémentaires :

U'_n désigne le groupe des (p)-unités globales de K_n (les éléments de $K_n^\times$ de valuation nulle en toute place finie ne divisant pas (p)).

C'_n désigne le groupe des (p)-unités circulaires des K_n, c'est-à-dire l'intersection des nombres circulaires de K_n avec U'_n.

X'_n désigne le p-groupe des (p)-classes, c'est-à-dire le p-groupe de Sylow du quotient du groupe des classes par l'image des places divisant p. Par le corps de classes X'_n est isomorphe au groupe de Galois sur K_n de la p-extension abélienne non ramifiée, totalement décomposée au dessus de (p), maximale de K_n.

Comme dans ce qui précède la notation $\overline{(.)}$ désigne la pro-p-complétion de $(.)$. Prenons les limites $\overline{U}'_\infty = \varprojlim \overline{U}'_n$, $\overline{C}'_\infty = \varprojlim \overline{C}'_n$, et $X'_\infty = \varprojlim X'_n$.

Il est bien connu qu'on a une suite exacte de Λ-modules :

$$(*) \qquad 0 \longrightarrow \overline{U}_\infty/\overline{C}_\infty \longrightarrow \overline{U}'_\infty/\overline{C}'_\infty \longrightarrow Z_\infty \longrightarrow 0$$

où Z_∞ est un $\mathbb{Z}_p$-module libre de rang $s-1$ (en notant s le nombre de places de K_∞ au-dessus de p), sur lequel Γ_n opère trivialement à partir d'un certain n.

Définition 4.1. *Soit $\overline{C}''_\infty$ le sous-module de $\overline{U}'_\infty$ tel que $\overline{C}''_\infty/\overline{C}'_\infty = \bigcup_n (\overline{U}'_\infty/\overline{C}'_\infty)^{\Gamma_n}$. Pour tout $n \geq 0$, on pose $\widetilde{C}''_n = (\overline{C}''_\infty)_{\Gamma_n}$, et on l'appelle le groupe des (p)-*unités circulaires *modifiées de K_n.*

Notons que cette définition est essentiellement celle de [K 2], p. 715, mais en évitant une opération de points fixes qui semble inutile, du moins pour les caractères $\psi \neq 1$. La conjecture de Greenberg entraîne l'égalité $(\overline{U}_\infty)_\psi = (\overline{C}_\infty)_\psi$, donc l'isomorphisme $(\overline{U}'_\infty/\overline{C}'_\infty)_\psi \cong (Z_\infty)_\psi$ (dans la suite $(*)$), autrement dit, l'égalité $(\overline{U}'_\infty)_\psi = (\overline{C}''_\infty)_\psi$, pour $\psi \neq 1$.

Question : $\widetilde{C}''_n$ est a priori un objet p-adique. Provient-il, à l'instar de $\overline{C}_n$ ou $\overline{C}'_n$, de la p-adification d'un objet global ?

Théorème 4.2. *Soit $\psi \in \Psi(\Delta)$ non trivial. Alors :*
(i) Les Λ_ψ-modules $(\overline{U}_\infty/\overline{C}_\infty)_\psi$ et $(\overline{U}'_\infty/\overline{C}''_\infty)_\psi$ sont pseudo-isomorphes. En particulier, $(\overline{U}'_\infty/\overline{C}''_\infty)_\psi$ et $(X'_\infty)_\psi$ ont même série caractéristique.
(ii) Pour tout $n \geq 0$, le passage aux co-invariants définit un homomorphisme injectif $(\widetilde{C}''_n)_\psi \hookrightarrow (\overline{U}'_n)_\psi$.

Démonstration : (i) Comme pour tout $n \geq 0$, $(\overline{U}_\infty/\overline{C}_\infty)_\psi^{\Gamma_n} = 0$, la suite exacte $(*)$ montre que $\overline{U}'_{\infty,\psi}/\overline{C}'_{\infty,\psi}$ contient un sous-module isomorphe à la somme directe $(\overline{U}_\infty/\overline{C}_\infty)_\psi \oplus (\overline{C}''_\infty/\overline{C}'_\infty)_\psi$, et que la surjection $(\overline{U}'_\infty/\overline{C}'_\infty)_\psi \twoheadrightarrow (Z_\infty)_\psi$ de $(*)$ induit une injection

$f\colon (\overline{C}''_\infty/\overline{C}'_\infty)_\psi \hookrightarrow (Z_\infty)_\psi$. Comme Γ_n opère trivialement sur Z_∞ et sur $\overline{C}''_\infty/\overline{C}'_\infty$ pour $n \gg 0$, le lemme du serpent appliqué à $(*)$ donne une suite exacte de Γ_n-modules :

$$0 \longrightarrow (\overline{C}''_\infty/\overline{C}'_\infty)_\psi \longrightarrow (Z_\infty)_\psi \longrightarrow (\overline{U}_\infty/\overline{C}_\infty)_{\psi,\Gamma_n},$$

et la finitude de $(\overline{U}_\infty/\overline{C}_\infty)_{\psi,\Gamma_n}$ montre que coker f est fini. En résumé, $(\overline{U}'_\infty/\overline{C}'_\infty)_\psi$ contient la somme $(\overline{U}_\infty/\overline{C}_\infty)_\psi \oplus (\overline{C}''_\infty/\overline{C}'_\infty)_\psi$ comme sous-module d'indice fini, et donc $(\overline{U}'_\infty/\overline{C}''_\infty)_\psi$ est pseudo-isomorphe à $(\overline{U}_\infty/\overline{C}_\infty)_\psi$.

Or l'on a vu au paragraphe 3 que $(\overline{U}_\infty/\overline{C}_\infty)_\psi$ a même série caractéristique que $(X_\infty)_\psi$, et il est bien connu que la conjecture de Leopoldt à tous les étages de la tour cyclotomique entraîne pour un corps totalement réel que X_∞ est pseudo-isomorphe à X'_∞ (voir e.g. [Win]).

(ii) La suite exacte tautologique de Λ_ψ-modules :

$$0 \longrightarrow (\overline{C}''_\infty)_\psi \longrightarrow (\overline{U}'_\infty)_\psi \longrightarrow (\overline{U}'_\infty/\overline{C}''_\infty)_\psi \longrightarrow 0$$

donne, par le lemme du serpent, une suite exacte :

$$(\overline{U}'_\infty/\overline{C}''_\infty)_\psi^{\Gamma_n} \longrightarrow (\overline{C}''_\infty)_{\psi,\Gamma_n} = (\widetilde{C}''_n)_\psi \longrightarrow (\overline{U}'_\infty)_{\psi,\Gamma_n}.$$

Montrons que $(\overline{U}'_\infty/\overline{C}''_\infty)_\psi^{\Gamma_n} = 0$. D'après (i), on sait déjà que ce module d'invariants est fini. Il suffit donc de montrer que $(\overline{U}'_\infty/\overline{C}''_\infty)_\psi$ n'a pas de sous-module fini non nul. Supposons que $(\overline{U}'_\infty/\overline{C}''_\infty)_\psi$ contienne une classe x modulo $(\overline{C}''_\infty)_\psi$ d'ordre fini m, c'est-à-dire (en notation additive) que $mx \in (\overline{C}''_\infty)_\psi$. Par définition cela signifie qu'il existe $n \geq 0$ tel que $(\gamma_n - 1)mx \in (\overline{C}'_\infty)_\psi$, où γ_n est un générateur topologique de Γ_n. Mais $(\gamma_n - 1)mx \in (\overline{C}'_\infty)_\psi$ équivaut à $m(\gamma_n - 1)x \in (\overline{C}'_\infty)_\psi$. Pour conclure que $x \in (\overline{C}''_\infty)_\psi$, il reste à montrer que $(\overline{U}'_\infty/\overline{C}'_\infty)_\psi$ est sans $\mathbb{Z}_p$-torsion. Cela se voit sur la suite $(*)$, qui montre simultanément que l'invariant μ de $(\overline{U}'_\infty/\overline{C}'_\infty)_\psi$ est trivial et que ses Γ-invariants sont sans $\mathbb{Z}_p$-torsion. On a ainsi montré que $(\overline{U}'_\infty/\overline{C}''_\infty)_\psi^{\Gamma_n} = 0$, donc que $(\widetilde{C}''_n)_\psi$ s'injecte dans $(\overline{U}'_\infty)_{\psi,\Gamma_n}$. Or l'on sait ([K 1], théorème 7.3) que $(\overline{U}'_\infty)_{\Gamma_n}$ s'injecte dans $\overline{U}'_n$. On peut donc identifier $(\widetilde{C}''_n)_\psi$ à un sous-module de $(\overline{U}'_n)_\psi$, pour tout ψ non-trivial. $\square$

Il s'agit maintenant de reconnaître le sous-module de $\mathbb{Z}_p$-torsion de $(\overline{U}'_n/\widetilde{C}''_n)_\psi$ pour tout ψ non trivial. Pour abréger les notations, on pose désormais la :

Notation. $\widetilde{Y}_n := (Y_\infty)_{\Gamma_n}$ *pour tout* $n \geq 0$ *et pour tout* Λ*-module* Y_∞.

Ainsi, $\widetilde{X}'_n = (X'_\infty)_{\Gamma_n}$, $\widetilde{U}'_n = (\overline{U}'_\infty)_{\Gamma_n}$, etc ... Le module $\widetilde{U}'_n$ n'est autre que le sous-module de $\overline{U}'_n$ formé des *normes cyclotomiques de (p)-unités*, c'est-à-dire l'intersection des groupes $N_{K_n/K}(\overline{U}'_n)$ pour tout $n \geq 0$ ([K 1], [K N F]). Introduisons comme dans [F G], [K 1] un sous-module $\widehat{U}'_n$ de $\overline{U}'_n$ formé de normes cyclotomiques locales partout au sens suivant :

Proposition 4.3 (Appendix to [F G]). *Pour tout* $n \geq 0$, *posons* $\mathfrak{K}_n = \overline{\mathcal{K}}_n^\times$ *et* $\mathfrak{K}_\infty = \varprojlim \mathfrak{K}_n$. *Rappelons que* $\widetilde{\mathfrak{K}}_n = (\mathfrak{K}_\infty)_{\Gamma_n}$. *On a une suite exacte de modules galoisiens (due à Sinnott) :*

$$\overline{U}'_n \longrightarrow \mathfrak{K}_n^{(0)}/\widetilde{\mathfrak{K}}_n \longrightarrow \widetilde{X}'_n \longrightarrow X'_n$$

Par définition, $\widehat{U}'_n$ est le noyau de l'homomorphisme de gauche. Notons que $\widehat{U}'_n$ est aussi appelé *groupe des unités logarithmiques* et $\widetilde{X}'_n$ *groupe des classes logarithmiques* dans [J]. Il est clair que $\widehat{U}'_n$ contient $\widetilde{U}'_n$, et Kuz'min a montré que $\widehat{U}'_n/\widetilde{U}'_n \simeq (X'_\infty)^{\Gamma_n}$ ([K 1], proposition 7.5).

On peut maintenant décrire la $\mathbb{Z}_p$-torsion de $(\overline{U}'_n/\widetilde{C}''_n)_\psi$:

Lemme 4.4. *Pour tout $n \geq 0$, pour tout $\psi \in \Psi(\Delta)$ non trivial, on a des isomorphismes canoniques :*
(i) $(\widehat{U}'_n/\widetilde{C}''_n)_\psi \cong \mathrm{tor}(\overline{U}'_n/\widetilde{C}''_n)_\psi$
(ii) $(\widetilde{\mathfrak{K}}_n/\widetilde{C}''_n)_\psi \cong \mathrm{tor}(\mathfrak{K}_n^{(0)}/\widetilde{C}''_n)_\psi$

Démonstration : Pour l'isomorphisme (i) il suffit de montrer que, dans la suite exacte

$$0 \longrightarrow (\widehat{U}'_n/\widetilde{C}''_n)_\psi \longrightarrow (\overline{U}'_n/\widetilde{C}''_n)_\psi \longrightarrow (\overline{U}'_n/\widehat{U}'_n)_\psi \longrightarrow 0,$$

le module $(\widehat{U}'_n/\widetilde{C}''_n)_\psi$ est fini et le module $(\overline{U}'_n/\widehat{U}'_n)_\psi$ est sans $\mathbb{Z}_p$-torsion. La seconde assertion résulte immédiatement de 4.3. La première résulte de $\frac{\widehat{U}'_n/\widetilde{C}''_n}{\widetilde{U}'_n/\widetilde{C}''_n} \cong (\widehat{U}'_n/\widetilde{U}'_n)$, et de la finitude des modules $(X'_\infty)^{\Gamma_n} \simeq \widehat{U}'_n/\widetilde{U}'_n$ et $\widetilde{U}'_n/\widetilde{C}''_n$. L'isomorphisme (ii) se démontre de façon analogue. □

On peut maintenant montrer des analogues des formules d'indice des paragraphes 1 et 2, sans facteur parasite :

Théorème 4.5. *Pour tout $n \geq 0$, pour tout ψ non trivial de $\Psi(\Delta)$, on a :*
(i) $\#\mathrm{tor}(\overline{U}'_n/\widetilde{C}''_n)_\psi = \#(\widetilde{X}'_n)_\psi$ *(comparer à [K 2], théorème 4.1).*
(ii) $\#\mathrm{tor}(\mathfrak{K}_n^{(0)}/\widetilde{C}''_n)_\psi = \#\mathrm{tor}(\mathfrak{X}_n)_\psi$.

Démonstration : (i) D'après 4.4, $\mathrm{tor}(\overline{U}'_n/\widetilde{C}''_n)_\psi \cong (\widehat{U}'_n/\widetilde{C}''_n)_\psi$. Or d'après 4.2 $(\overline{U}'_\infty/\overline{C}''_\infty)_\psi$ n'a pas de point fixe par Γ_n non nul et a même série caractéristique que $(X'_\infty)_\psi$. Ainsi on obtient $\#(\widetilde{U}'_n/\widetilde{C}''_n)_\psi = \#(\widetilde{X}'_n)_\psi/\#(X'_\infty)_\psi^{\Gamma_n}$. Mais on a vu que $(X'_\infty)_\psi^{\Gamma_n} \cong (\widehat{U}'_n/\widetilde{U}'_n)_\psi$. On en déduit (i) par multiplicativité des indices.
(ii) La suite exacte du corps de classes pour la décomposition

$$0 \longrightarrow \overline{U}'_\infty/\overline{C}''_\infty \longrightarrow \mathfrak{K}_\infty/\overline{C}''_\infty \longrightarrow \mathfrak{X}_\infty \longrightarrow X'_\infty \longrightarrow 0$$

et la proposition 4.2 permettent de dire que les Λ_ψ-modules de torsion $(\mathfrak{K}_\infty/\overline{C}''_\infty)_\psi$ et $(\mathfrak{X}_\infty)_\psi$ ont même série caractéristique. Or l'on sait que $\mathfrak{X}_\infty^{\Gamma_n} = 0$ et, d'après 4.2, que $(\overline{U}'_\infty/\overline{C}''_\infty)_\psi^{\Gamma_n} = 0$, donc $(\mathfrak{K}_\infty/\overline{C}''_\infty)_\psi^{\Gamma_n} = 0$. On conclut par co-descente. □

Remarque. *On peut exprimer l'ordre $\widetilde{h}'_{n,\psi}$ de $\left(\widetilde{X}'_n\right)_\psi = (X'_\infty)_{\Gamma_n,\psi}$ en fonction d'un régulateur p-adique "à la Leopoldt". En effet, la suite exacte de décomposition :*

$$0 \longrightarrow \mathfrak{K}_\infty/\overline{U}'_\infty \longrightarrow \mathfrak{X}_\infty \longrightarrow X'_\infty \longrightarrow 0 \quad \textit{donne par descente une suite exacte :}$$

$$0 \longrightarrow (X'_\infty)^{\Gamma_n} \longrightarrow (\mathfrak{K}_\infty/\overline{U}'_\infty)_{\Gamma_n} = (\widetilde{\mathfrak{K}}_n/\widetilde{U}'_n) \longrightarrow (\widetilde{\mathfrak{X}}_n) = \mathrm{tor}(\mathfrak{X}_n) \longrightarrow \widetilde{X}'_n \longrightarrow 0$$

On obtient ainsi, pour tout ψ non trivial de $\Psi(\Delta)$: $\widetilde{h}'_{n,\psi} = \#\mathrm{tor}(\mathfrak{X}_{n,\psi})/(\widetilde{\mathfrak{K}}_{n,\psi} : \widehat{U}'_{n,\psi})$. Or $\#\mathrm{tor}(\mathfrak{X}_n)_\psi$ a été calculé en 2.6, alors que $(\widetilde{\mathfrak{K}}_{n,\psi} : \widehat{U}'_{n,\psi})$ peut s'interpréter via le $\mathcal{L}og$ comme un régulateur (p,ψ)-adique. (comparer à [J], qui donne une expression de $\#\widetilde{X}'_n$ en termes de "logarithme de Gras").

Comme dans le paragraphe 3, les égalités entre les ordres traduisent en fait, moyennant certaines hypothèses, des relations entre les modules eux-mêmes :

Théorème 4.6. *Pour tout caractère ψ non trivial de $\Psi(\Delta)$:*
(i) Pour tout $n \geq 0$, les modules $\mathrm{tor}(\mathfrak{K}_n^{(0)}/\widetilde{C}''_n)_\psi$ et $\mathrm{tor}(\mathfrak{X}_n)_\psi$ ont même idéal de Fitting sur l'algèbre $A_\psi[\Gamma/\Gamma_n]$.
(ii) La conjecture de Greenberg entraîne l'existence d'isomorphismes canoniques de modules galoisiens $X'_{n,\psi} \cong \mathrm{tor}(\overline{U}'_n/\widetilde{C}''_n)_\psi$ pour n assez grand. Si en outre $\psi(p) \neq 1$, on peut remplacer $\mathrm{tor}(\overline{U}'_n/\widetilde{C}''_n)_\psi$ par $(\overline{U}'_n/\widetilde{C}''_n)_\psi$.

Démonstration : (i) D'après 4.4, $\mathrm{tor}(\mathfrak{K}_n^{(0)}/\widetilde{C}''_n)_\psi \cong (\widetilde{\mathfrak{K}}_n^{(0)}/\widetilde{C}''_n)_\psi = (\mathfrak{K}_\infty/\overline{C}''_\infty)_{\psi,\Gamma_n}$. La suite de la démonstration de l'assertion (i) se fait exactement comme dans le théorème 3.3.
(ii) D'après 4.4, $\mathrm{tor}(\overline{U}'_n/\widetilde{C}''_n)_\psi \cong (\widehat{U}'_n/\widetilde{C}''_n)_\psi$. La conjecture de Greenberg entraîne les égalités $(\widetilde{C}''_n)_\psi = (\widetilde{U}'_n)_\psi$ et $(\widehat{U}'_n/\widetilde{C}''_n)_\psi = (\widehat{U}'_n/\widetilde{U}'_n)_\psi$. Or d'après [K 1] le quotient $\widehat{U}'_n/\widetilde{U}'_n$ est isomorphe à $(X'_\infty)^{\Gamma_n}$. Pour n assez grand, on a en outre les isomorphismes canoniques de modules galoisiens $(X'_\infty)^{\Gamma_n} \cong X'_\infty \cong X'_n$ puisque X'_∞ est fini par Greenberg. Le passage aux ψ-composantes est automatique. Si en outre $\psi(p) \neq 1$, le même argument qu'en 3.3 montre que $(\mathfrak{K}_n^{(0)}/\widetilde{\mathfrak{K}}_n)_\psi = 0$, et la suite exacte de Sinnott (proposition 4.3) entraîne la nullité de $(\overline{U}'_n/\widehat{U}'_n)_\psi$, c'est-à-dire l'égalité $(\widehat{U}'_n/\widetilde{C}''_n)_\psi = (\overline{U}'_n/\widetilde{C}''_n)_\psi$. $\square$

Bibliographie.

[Be] J.-R. Belliard, *Sur la structure galoisienne des unités circulaires dans les $\mathbb{Z}_p$-extensions*, J. of Number Theory **69**, 16–49 (1998)

[B B] W. Bley, D. Burns, *Equivariant Tamagawa numbers, Fitting ideals and Iwasawa theory*, à paraître dans Compositio math. (2000)

[Coa] J. Coates, *p-adic L-functions and Iwasawa's theory*, extrait de : *Algebraic number fields: L-functions and Galois properties* , Proc. Sympos., Univ. Durham, Durham (1975), 269–353, Academic Press, London (1977)

[Cor] P. Cornacchia, *Fitting ideals of class groups in a $\mathbb{Z}_p$-extension*, Acta Arithm. **87**, 1, 79–88 (1998)

[F G] L. J. Federer, B. H. Gross, *Regulators and Iwasawa modules*, with an appendix by W. Sinnott, Invent. Math. **62**, 3, 443–457 (1981)

[Gi 1] R. Gillard, *Unités cyclotomiques, unités semi-locales et $\mathbb{Z}_l$-extensions*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble **29**, 1, 49–79 (1979)

[Gi 2] R. Gillard, *Unités cyclotomiques, unités semi-locales et $\mathbb{Z}_l$-extensions II*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble **29**, 4, 1–15 (1979)

[Gi 3] R. Gillard, *Remarques sur les unités cyclotomiques et elliptiques*, J. of Number Theory **11**, 21–48 (1979)

[G J] M. Grandet, J.-F. Jaulent, *Sur la capitulation dans une $\mathbb{Z}_\ell$-extension*, J. Reine Angew. Math **362**, 213–217 (1985)

[Gra 1] G. Gras, *Classes d'idéaux des corps abéliens et nombres de Bernoulli généralisés*, Ann. Inst. Fourier **27**, 1–66 (1977)

[Gra 2] G. Gras, *Canonical divisibilities of values of p-adic L-functions*, Journées Arithmétiques d'Exeter (1980)

[Gree] R. Greenberg, *On the Iwasawa invariants of totally real number fields*, Amer. J. Math. **98**, 263–284 (1976)

[Grei 1] C. Greither, *Class groups of abelian fields, and the Main Conjecture*, Ann. Inst. Fourier **42**, 449–499 (1992)

[Grei 2] C. Greither, *The structure of some minus class groups, and Chinburg's* 3rd *conjecture for abelian fields* , Math. Zeit. **229**, 107–136 (1998)

[I] K. Iwasawa, *On some modules in the theory of cyclotomic fields*, J. Math. Soc. Japan **16**, 1, 42–82 (1964)

[J] J.-F. Jaulent, *Classes logarithmiques des corps de nombres*, J. Théor. Nombres Bordeaux **6**, 2, 301–325 (1994)

[K N F] M. Kolster, T. Nguyen Quang Do, V. Fleckinger, *Twisted S-units, p-adic class number formulas, and the Lichtenbaum conjectures*, Duke Math. J. **84**, 679–717 (1996)

[K S] J. Kraft, R. Schoof, *Computing Iwasawa modules of real quadratic number fields*, Special issue in honour of Frans Oort, Compositio Math. **97**, 135–155 (1995)

[K 1] L. V. Kuz'min, *The Tate module of algebraic number fields*, Math USSR-Izv. **6**, 263–321 (1972)

[K 2] L. V. Kuz'min, *On formulas for the class number of real abelian fields*, Math USSR-Izv. **60**, 4, 695–761 (1996)

[La] S. Lang, *Introduction to Cyclotomic Fields I and II*, combined second edition, GTM **121**, Springer-Verlag, New-York (1990)

[Le 1] G. Lettl *The ring of integers of an abelian number field*, J. reine angew. Math. **404**, 162–170 (1990)

[Le 2] G. Lettl *Relative Galois module structure of integers of local abelian fields*, Acta Arithm. **85**, 3, 235–248 (1998)

[M W] B. Mazur, A. Wiles, *Class fields of abelian extensions of* $\mathbb{Q}$, Invent. Math. **76**, 2, 179–330 (1984)

[O 1] M. Ozaki, *On the cyclotomic unit group and the ideal class group of a real abelian number field I*, J. of Number Theory **64**, 211–222 (1997)

[O 2] M. Ozaki, *On the cyclotomic unit group and the ideal class group of a real abelian number field II*, J. of Number Theory **64**, 223–232 (1997)

[Si 1] W. Sinnott, *On the Stickelberger ideal and the circular units of a cyclotomic field*, Ann. of Math. **108**, 1, 107–134 (1978)

[Si 2] W. Sinnott, *On the Stickelberger ideal and the circular units of an abelian field*, Invent. Math. **62**, 181–234 (1981)

[So 1] D. Solomon, *On a construction of* $p-$*units in abelian fields*, Invent. Math. **109**, 329–350 (1992)

[So 2] D. Solomon, *Galois relations for cyclotomic numbers and* p*-units*, J. Number Theory **78**, 1–26 (1994)

[T] T. Tsuji, *Semi-local units modulo cyclotomic units*, J. Number Theory **46**, 158–178 (1999)

[V] L. Villemot, *Etude du quotient des unités semi-locales par les unités cyclotomiques dans les* $\mathbb{Z}_p$*-extensions des corps de nombres abéliens réels*, thèse, Orsay (1981)

[Wa] L. Washington, *Introduction to Cyclotomic Fields*, 2^{nd} édition, GTM **83**, Springer-Verlag (1982)

[Wil] A. Wiles, *The Iwasawa conjecture for totally real fields*, Ann. of Math. **131**, 493–540 (1990)

[Win] K. Wingberg, *Duality theorems for* Γ*-extensions of algebraic number fields*, Compositio Math. **55** 333–381 (1985)

belliard@math.univ-fcomte.fr et nguyen@math.univ-fcomte.fr
Université de Franche-Comté
Laboratoire de Mathématiques CNRS UMR 6623
16 route de Gray, 25030 Besançon Cedex, France